ПРОИЗВОДНЫЕ

для старшеклассников и студентов

Автор
Трепачёв Дмитрий

2026 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от школьников, готовящихся к ЕГЭ и ЦТ, до студентов, осваивающих высшую математику.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Производные — одна из самых важных тем в математике. Без понимания производных невозможно освоить физику, экономику, основы математического анализа. Но у многих учеников эта тема вызывает страх: слишком много формул, слишком много правил, слишком много всего...

В этой книге я разбил материал на три уровня, чтобы каждый мог учиться в своём темпе.

Часть 1. Школьный уровень (главы 1–8)

Этот раздел предназначен для учеников 10–11 классов, готовящихся к ЕГЭ, ЦТ и выпускным экзаменам. Здесь мы изучаем:

- таблицу производных основных функций (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические);
- правила дифференцирования — произведение и частное;
- итоговая практика по всей школьной части.

Этого достаточно, чтобы решать любые задачи на производные в школьных экзаменах. Если вы школьник — можете смело ограничиться этими 8 главами.

Часть 2. Первый курс (главы 9–18)

Этот раздел для студентов младших курсов, которые уже освоили школьную базу и хотят углубить свои знания. Здесь мы разбираем:

- производную сложной функции;
- геометрические приложения (касательная, нормаль);
- исследование функций (монотонность, экстремумы, выпуклость);
- производные высших порядков;
- логарифмическое дифференцирование;
- производную неявной функции;
- производную параметрически заданной функции (включая вторую производную и производные высших порядков).

Эти темы необходимы для успешной сдачи экзаменов по математическому анализу на первом курсе.

Часть 3. Второй курс (главы 19–26)

Этот раздел для студентов, изучающих функции нескольких переменных. Здесь мы переходим в многомерный мир:

- частные производные первого и высших порядков;
- производную сложной функции нескольких переменных;
- производную неявной функции нескольких переменных;
- касательную плоскость и нормаль к поверхности;
- градиент и производную по направлению;
- экстремумы функций нескольких переменных;
- условный экстремум и метод множителей Лагранжа.

Это основа для дальнейшего изучения математической физики, оптимизации и многих других дисциплин.

Как работать с книгой

Каждая глава построена одинаково: сначала теория (только самое нужное, без воды), потом разобранные примеры, а затем большое количество задач для самостоятельного решения. Задачи однотипные — это сделано специально, чтобы довести навык до автоматизма.

Не пытайтесь прочитать книгу за один вечер. Математика не терпит суеты. Берите по одной главе в день, внимательно разбирайте примеры, решайте задачи. Если что-то непонятно — возвращайтесь к теории ещё раз.

Благодарности

Спасибо моим ученикам, которые своими вопросами помогли понять, какие темы нужно объяснять особенно тщательно. Спасибо вам, читатель, за то, что решили потратить время на изучение этой важной темы.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть пособия по алгебре, геометрии, физике — всё, что я наработал за годы преподавания.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ, а также помогаю студентам осваивать высшую математику.

Удачи в изучении производных!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

1 Производная степенной функции **11**
1.1 Теория . . . 11
Пример 1. Целая положительная степень без коэффициента . . . 11
Пример 2. Целая положительная степень с коэффициентом . . . 11
Пример 3. Степень 1 (просто икс) с коэффициентом . . . 12
Пример 4. Константа (степень 0) . . . 12
Пример 5. Отрицательная степень без коэффициента . . . 12
Пример 6. Отрицательная степень с коэффициентом . . . 12
Пример 7. Дробная степень (корень) без коэффициента . . . 12
Пример 8. Дробная степень (корень) с коэффициентом . . . 13
Пример 9. Сумма двух степенных функций . . . 13
Пример 10. Разность двух степенных функций . . . 13
Пример 11. Сумма с коэффициентами . . . 13
Пример 12. Разность с коэффициентами . . . 13
Пример 13. Сумма трёх слагаемых . . . 13
Пример 14. Сумма с корнями . . . 13
Пример 15. Проверка . . . 14
1.2 Задачи . . . 14

2 Производная показательной функции **16**
2.1 Теория . . . 16
Пример 1. Основание 2 . . . 16
Пример 2. Основание 2 с коэффициентом . . . 16

Пример 3. Основание 3 . . . 16
Пример 4. Основание 3 с отрицательным коэффициентом . . . 17
Пример 5. Основание 10 . . . 17
Пример 6. Экспонента . . . 17
Пример 7. Экспонента с коэффициентом . . . 17
Пример 8. Основание меньше 1 . . . 17
Пример 9. Сумма показательных функций . . . 17
Пример 10. Сумма с коэффициентами . . . 18
Пример 11. Разность показательных функций . . . 18
Пример 12. Сумма экспоненты и константы . . . 18
Пример 13. Смешанная сумма (степенная и показательная) . . . 18
Пример 14. Смешанная сумма с коэффициентами . . . 18
Пример 15. Сумма трёх слагаемых разных типов . . . 18
2.2 Задачи . . . 18

3 Производная логарифмической функции **20**
3.1 Теория . . . 20
Пример 1. Натуральный логарифм . . . 20
Пример 2. Натуральный логарифм с коэффициентом . . . 20
Пример 3. Натуральный логарифм с отрицательным коэффициентом . . . 20
Пример 4. Логарифм по основанию 2 . . . 21
Пример 5. Логарифм по основанию 2 с коэффициентом . . . 21
Пример 6. Логарифм по основанию 10 (десятичный) . . . 21
Пример 7. Логарифм по основанию 10 с коэффициентом . . . 21
Пример 8. Логарифм по основанию 3 . . . 21
Пример 9. Логарифм по основанию 3 с отрицательным коэффициентом . . . 21
Пример 10. Сумма логарифмов . . . 22
Пример 11. Разность логарифмов . . . 22
Пример 12. Сумма с коэффициентами . . . 22
Пример 13. Логарифм и константа . . . 22
Пример 14. Смешанная сумма (степенная и логарифмическая) . . . 22
Пример 15. Смешанная сумма (показательная и логарифмическая) . . . 22
3.2 Задачи . . . 22

4 Производные тригонометрических функций **24**
4.1 Теория . . . 24
Пример 1. Производная синуса . . . 24
Пример 2. Производная синуса с коэффициентом . . . 24
Пример 3. Производная синуса с отрицательным коэффициентом . . . 25
Пример 4. Производная косинуса . . . 25
Пример 5. Производная косинуса с коэффициентом . . . 25
Пример 6. Производная косинуса с отрицательным коэффициентом . . . 25
Пример 7. Производная тангенса . . . 25
Пример 8. Производная тангенса с коэффициентом . . . 25
Пример 9. Производная котангенса . . . 26
Пример 10. Производная котангенса с коэффициентом . . . 26
Пример 11. Дробные коэффициенты . . . 26
Пример 12. Сумма синуса и косинуса . . . 26
Пример 13. Разность синуса и косинуса . . . 26
Пример 14. Сумма тангенса и котангенса . . . 26
Пример 15. Сумма с коэффициентами . . . 27
Пример 16. Тригонометрические функции и константа . . . 27
Пример 17. Смешанная сумма (степенная и тригонометрическая) . . . 27
Пример 18. Смешанная сумма (показательная и тригонометрическая) . . . 27

Пример 19. Смешанная сумма (логарифмическая и тригонометрическая) 27
Пример 20. Сумма трёх слагаемых разных типов 27
4.2 Задачи 27

5 Производные обратных тригонометрических функций **29**
5.1 Теория 29
Пример 1. Производная арксинуса 29
Пример 2. Производная арксинуса с коэффициентом 29
Пример 3. Производная арккосинуса 30
Пример 4. Производная арккосинуса с коэффициентом 30
Пример 5. Производная арктангенса 30
Пример 6. Производная арктангенса с коэффициентом 30
Пример 7. Производная арккотангенса 30
Пример 8. Производная арккотангенса с коэффициентом 30
Пример 9. Отрицательные коэффициенты 31
Пример 10. Дробные коэффициенты 31
Пример 11. Сумма арксинуса и арктангенса 31
Пример 12. Разность арккосинуса и арккотангенса 31
Пример 13. Сумма с коэффициентами 31
Пример 14. Обратные тригонометрические функции и константа 31
Пример 15. Смешанная сумма (степенная и арктангенс) 32
Пример 16. Смешанная сумма (показательная и арксинус) 32
Пример 17. Смешанная сумма (логарифмическая и арктангенс) 32
Пример 18. Сумма трёх слагаемых разных типов 32
5.2 Задачи 32

6 Производная произведения **34**
6.1 Теория 34
Пример 1. Произведение x^2 и x^3 34
Пример 2. Произведение x^2 и $\sin x$ 34
Пример 3. Произведение $\sin x$ и $\cos x$ 34
Пример 4. Произведение x и $\ln x$ 35
Пример 5. Произведение e^x и $\sin x$ 35
Пример 6. Произведение 2^x и $\log_2 x$ 35
Пример 7. Произведение $\sqrt{x}$ и $\operatorname{arctg} x$ 35
Пример 8. Произведение трёх функций? 36
Пример 9. Произведение с константой 36
Пример 10. Проверка для частного случая 36
6.2 Задачи 36

7 Производная частного **38**
7.1 Теория 38
Пример 1. Частное $\frac{x^3}{x^2}$ 38
Пример 2. Частное $\frac{x^2}{\sin x}$ 38
Пример 3. Частное $\frac{\sin x}{\cos x}$ 39
Пример 4. Частное $\frac{\ln x}{x}$ 39
Пример 5. Частное $\frac{e^x}{\sin x}$ 39
Пример 6. Частное $\frac{x}{e^x}$ 39
Пример 7. Частное $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ 40
Пример 8. Частное $\frac{2^x}{x^2}$ 40

Пример 9. Частное с константой в числителе . . . 40
Пример 10. Проверка для частного случая . . . 40
7.2 Задачи . . . 41

8 Практика по блоку 1 **43**
8.1 Теория . . . 43
8.2 Задачи . . . 43

9 Производная сложной функции **46**
9.1 Теория . . . 46
Пример 1. Степенная функция от линейного выражения . . . 46
Пример 2. Корень от линейного выражения . . . 46
Пример 3. Экспонента от линейного выражения . . . 47
Пример 4. Синус от линейного выражения . . . 47
Пример 5. Логарифм от линейного выражения . . . 47
Пример 6. Арктангенс от линейного выражения . . . 47
Пример 7. Степенная функция от синуса . . . 47
Пример 8. Корень от логарифма . . . 48
Пример 9. Двойная сложность . . . 48
Пример 10. Сложная функция с произведением . . . 48
9.2 Задачи . . . 48

10 Уравнение касательной и нормали **50**
10.1 Теория . . . 50
Пример 1. Касательная к параболе . . . 50
Пример 2. Касательная к синусоиде . . . 50
Пример 3. Нормаль к параболе . . . 51
Пример 4. Нормаль к экспоненте . . . 51
Пример 5. Особый случай: горизонтальная касательная . . . 51
Пример 6. Особый случай: вертикальная касательная . . . 51
Пример 7. Касательная к логарифму . . . 51
Пример 8. Касательная и нормаль к сложной функции . . . 52
Пример 9. Точка пересечения касательной с осями . . . 52
10.2 Задачи . . . 52

11 Монотонность и экстремумы **54**
11.1 Теория . . . 54
Пример 1. Квадратичная функция . . . 54
Пример 2. Кубическая функция . . . 55
Пример 3. Функция с корнем . . . 55
Пример 4. Использование второй производной . . . 56
Пример 5. Функция без экстремумов . . . 56
11.2 Задачи . . . 56

12 Выпуклость и точки перегиба **58**
12.1 Теория . . . 58
Пример 1. Квадратичная функция . . . 58
Пример 2. Кубическая функция . . . 58
Пример 3. Функция $f(x) = x^4$ . . . 59
Пример 4. Функция $f(x) = \ln x$ . . . 59
Пример 5. Функция $f(x) = e^x$ . . . 59
Пример 6. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ . . . 59
Пример 7. Функция $f(x) = \sin x$ на интервале $[0, 2\pi]$ . . . 59
Пример 8. Функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ . . . 60
Пример 9. Использование второй производной для уточнения экстремумов . . . 60

12.2 Задачи . . . 60

13 Производные высших порядков **62**
13.1 Теория . . . 62
Пример 1. Степенная функция . . . 62
Пример 2. Многочлен . . . 62
Пример 3. Экспонента . . . 63
Пример 4. Показательная функция . . . 63
Пример 5. Натуральный логарифм . . . 63
Пример 6. Синус . . . 63
Пример 7. Косинус . . . 63
Пример 8. Произведение . . . 64
Пример 9. Сложная функция . . . 64
Пример 10. Физический смысл . . . 64
13.2 Задачи . . . 64

14 Логарифмическое дифференцирование **66**
14.1 Теория . . . 66
Пример 1. Функция $y = x^x$ . . . 66
Пример 2. Функция $y = x^{\sin x}$ . . . 66
Пример 3. Функция $y = (\sin x)^x$ . . . 66
Пример 4. Функция $y = (2x+1)^{3x-2}$ . . . 67
Пример 5. Произведение многих множителей . . . 67
Пример 6. Частное многих множителей . . . 67
Пример 7. Степенная функция с параметром . . . 67
Пример 8. Показательно-степенная функция . . . 67
Пример 9. Проверка для простого случая . . . 68
Пример 10. Проверка для показательной функции . . . 68
14.2 Задачи . . . 68

15 Производная неявной функции **70**
15.1 Теория . . . 70
Пример 1. Окружность . . . 70
Пример 2. Эллипс . . . 70
Пример 3. Произведение x и y . . . 71
Пример 4. Экспонента и логарифм . . . 71
Пример 5. Тригонометрическая функция . . . 71
Пример 6. Логарифмическая функция . . . 71
Пример 7. Нахождение значения производной в точке . . . 72
Пример 8. Вторая производная неявной функции . . . 72
15.2 Задачи . . . 72

16 Производная параметрически заданной функции **74**
16.1 Теория . . . 74
Пример 1. Параметрическое задание прямой . . . 74
Пример 2. Параметрическое задание окружности . . . 75
Пример 3. Параметрическое задание эллипса . . . 75
Пример 4. Нахождение второй производной . . . 75
Пример 5. Вторая производная по формуле . . . 75
Пример 6. Параметрическое задание циклоиды . . . 76
Пример 7. Нахождение уравнения касательной . . . 76
Пример 8. Производная в особой точке . . . 76
Пример 9. Производная сложной параметрической функции . . . 77
16.2 Задачи . . . 77

17 Вторая производная параметрически заданной функции **79**
17.1 Теория . . . 79
Пример 1. Степенная параметризация . . . 79
Пример 2. Использование общей формулы . . . 80
Пример 3. Окружность . . . 80
Пример 4. Эллипс . . . 80
Пример 5. Циклоида . . . 81
Пример 6. Логарифмическая параметризация . . . 81
Пример 7. Показательная параметризация . . . 81
Пример 8. Сложная параметризация . . . 82
Пример 9. Особая точка . . . 82
17.2 Задачи . . . 82

18 Производные высших порядков для параметрических функций **84**
18.1 Теория . . . 84
Пример 1. Третья производная для степенной параметризации . . . 84
Пример 2. Третья производная для окружности . . . 85
Пример 3. Третья производная для экспоненциальной параметризации . . . 85
Пример 4. Третья производная для логарифмической параметризации . . . 85
Пример 5. Производная четвёртого порядка . . . 86
Пример 6. Применение к исследованию функции . . . 86
Пример 7. Параметризация с тригонометрическими функциями . . . 86
Пример 8. Связь с кривизной . . . 87
18.2 Задачи . . . 87

19 Функции нескольких переменных. Частные производные **89**
19.1 Теория . . . 89
Пример 1. Степенная функция двух переменных . . . 89
Пример 2. Произведение переменных . . . 90
Пример 3. Деление . . . 90
Пример 4. Тригонометрическая функция . . . 90
Пример 5. Экспонента . . . 90
Пример 6. Логарифм . . . 90
Пример 7. Функция трёх переменных . . . 91
Пример 8. Сложная функция . . . 91
Пример 9. Значение частной производной в точке . . . 91
Пример 10. Экономический смысл . . . 91
19.2 Задачи . . . 91

20 Частные производные высших порядков **93**
20.1 Теория . . . 93
Пример 1. Многочлен второй степени . . . 93
Пример 2. Степенная функция . . . 94
Пример 3. Тригонометрическая функция . . . 94
Пример 4. Экспонента . . . 94
Пример 5. Логарифм . . . 95
Пример 6. Производная третьего порядка . . . 95
Пример 7. Функция трёх переменных . . . 95
Пример 8. Проверка уравнения Лапласа . . . 96
20.2 Задачи . . . 96

21 Производная сложной функции (несколько переменных) **98**
21.1 Теория . . . 98
Пример 1. Одна независимая переменная . . . 98
Пример 2. Одна независимая переменная . . . 99

Пример 3. Две независимые переменные . . . 99
Пример 4. Смешанный случай . . . 100
Пример 5. Три переменные . . . 100
Пример 6. Проверка независимости . . . 100
Пример 7. Производная по направлению . . . 101
21.2 Задачи . . . 101

22 Производная неявной функции нескольких переменных **102**
22.1 Теория . . . 102
Пример 1. Поверхность второго порядка . . . 102
Пример 2. Эллипсоид . . . 103
Пример 3. Неявная функция с произведением . . . 103
Пример 4. Трансцендентное уравнение . . . 103
Пример 5. Логарифмическое уравнение . . . 103
Пример 6. Значение производной в точке . . . 104
Пример 7. Система неявных функций . . . 104
Пример 8. Касательная плоскость . . . 104
22.2 Задачи . . . 104

23 Касательная плоскость и нормаль к поверхности **106**
23.1 Теория . . . 106
Пример 1. Явное задание: параболоид . . . 106
Пример 2. Явное задание: гиперболический параболоид . . . 107
Пример 3. Неявное задание: сфера . . . 107
Пример 4. Неявное задание: эллипсоид . . . 107
Пример 5. Точка, где нормаль вертикальна . . . 108
Пример 6. Точка, где касательная плоскость горизонтальна . . . 108
Пример 7. Угол между поверхностями . . . 108
Пример 8. Касательная плоскость к цилиндру . . . 108
23.2 Задачи . . . 109

24 Градиент и производная по направлению **110**
24.1 Теория . . . 110
Пример 1. Градиент функции двух переменных . . . 111
Пример 2. Градиент функции трёх переменных . . . 111
Пример 3. Производная по направлению . . . 111
Пример 4. Производная по направлению с углом . . . 111
Пример 5. Направление наибольшего роста . . . 112
Пример 6. Производная по направлению для функции трёх переменных . . . 112
Пример 7. Градиент и линии уровня . . . 113
Пример 8. Производная по направлению касательной к линии уровня . . . 113
24.2 Задачи . . . 113

25 Экстремумы функций нескольких переменных **115**
25.1 Теория . . . 115
Пример 1. Поиск стационарных точек . . . 115
Пример 2. Исследование типа экстремума . . . 116
Пример 3. Седловая точка . . . 116
Пример 4. Случай $\Delta = 0$ . . . 116
Пример 5. Наибольшее и наименьшее значение в области . . . 117
Пример 6. Функция трёх переменных . . . 117
25.2 Задачи . . . 117

26 Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа **119**
26.1 Теория . . . 119

Пример 1. Максимум произведения при фиксированной сумме 119
Пример 2. Минимум суммы при фиксированном произведении 120
Пример 3. Расстояние от точки до прямой 120
Пример 4. Экстремум функции трёх переменных с одной связью 121
Пример 5. Две связи 122
26.2 Задачи 122

Производная степенной функции

Теория

В этой главе мы научимся находить производную от степенной функции x^n. Это самая важная и самая частая производная, с которой всё начинается.

Запомните главную формулу:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Что означают эти буквы?

- x — переменная
- n — любое действительное число (целое, дробное, отрицательное — любое)
- x^n — степенная функция
- $n \cdot x^{n-1}$ — её производная

Как запомнить: показатель степени n становится коэффициентом, а сама степень уменьшается на единицу.

Частные случаи, которые нужно знать наизусть:

- $(x)' = 1$ (производная просто икса равна единице)
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (корень — это степень $1/2$)
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ (единица на икс — это степень -1)

Правило вынесения константы

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

где c — любое число. Константу можно выносить за знак производной.

Правило суммы и разности

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Производная суммы равна сумме производных, производная разности равна разности производных.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Целая положительная степень без коэффициента

Найдите производную:

$$f(x) = x^5$$

Применяем формулу: показатель степени 5 становится коэффициентом, степень уменьшается на 1:

$$f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$$

Пример 2

Целая положительная степень с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 3x^5$$

Выносим константу 3 за знак производной:

$$f'(x) = 3 \cdot (x^5)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$$

Пример 3

Степень 1 (просто икс) с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 7x$$

Здесь $x = x^1$. По формуле: $(x)' = 1$, умножаем на коэффициент:

$$f'(x) = 7 \cdot 1 = 7$$

Пример 4

Константа (степень 0)

Найдите производную:

$$f(x) = 5$$

Константу можно представить как $5 = 5 \cdot x^0$. По формуле: $(x^0)' = 0$, значит:

$$f'(x) = 5 \cdot 0 = 0$$

Запомните: производная константы всегда равна нулю.

Пример 5

Отрицательная степень без коэффициента

Найдите производную:

$$f(x) = x^{-4}$$

Показатель степени -4 становится коэффициентом, степень уменьшается на 1 (было -4, стало -5):

$$f'(x) = -4 \cdot x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

Обычно ответ записывают без отрицательной степени:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^5}$$

Пример 6

Отрицательная степень с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 2x^{-4}$$

$$f'(x) = 2 \cdot (-4x^{-5}) = -8x^{-5} = -\frac{8}{x^5}$$

Пример 7

Дробная степень (корень) без коэффициента

Найдите производную:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Вспоминаем: $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Применяем формулу с $n = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Пример 8

Дробная степень (корень) с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 5\sqrt{x}$$

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Пример 9

Сумма двух степенных функций

Найдите производную:

$$f(x) = x^3 + x^2$$

Применяем правило суммы: производная суммы равна сумме производных:

$$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x$$

Пример 10

Разность двух степенных функций

Найдите производную:

$$f(x) = x^4 - x^3$$

$$f'(x) = (x^4)' - (x^3)' = 4x^3 - 3x^2$$

Пример 11

Сумма с коэффициентами

Найдите производную:

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2$$

$$f'(x) = 2 \cdot (x^3)' + 5 \cdot (x^2)' = 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x = 6x^2 + 10x$$

Пример 12

Разность с коэффициентами

Найдите производную:

$$f(x) = 4x^5 - 3x^2$$

$$f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 2x = 20x^4 - 6x$$

Пример 13

Сумма трёх слагаемых

Найдите производную:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x = 4x^3 + 6x^2 - 10x$$

Пример 14

Сумма с корнями

Найдите производную:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

Пример 15

Проверка

Проверим пример 9: если $f(x) = x^3 + x^2$, то $f'(x) = 3x^2 + 2x$. Для $x = 1$: $f'(1) = 3 + 2 = 5$. Можно проверить приближённо через определение производной.

Задачи

1. Найдите производные (одиночные функции):

1) x^2 **4)** x^5 **7)** x^8 **10)** x^{15}

2) x^3 **5)** x^6 **8)** x^9 **11)** x^{20}

3) x^4 **6)** x^7 **9)** x^{10} **12)** x^{25}

2. Найдите производные (с коэффициентами):

1) $2x^2$ **4)** $5x^5$ **7)** $-2x^3$ **10)** $\frac{1}{3}x^3$

2) $3x^3$ **5)** $10x^6$ **8)** $-5x^4$ **11)** $\frac{2}{3}x^4$

3) $4x^4$ **6)** $20x^7$ **9)** $\frac{1}{2}x^2$ **12)** $\frac{3}{4}x^5$

3. Найдите производные (константы):

1) x **4)** $-3x$ **7)** 5 **10)** 100

2) $2x$ **5)** $\frac{1}{2}x$ **8)** -3 **11)** π

3) $5x$ **6)** $-\frac{2}{3}x$ **9)** 10 **12)** 0

4. Найдите производные (отрицательные степени):

1) x^{-2} **4)** x^{-5} **7)** $4x^{-4}$ **10)** $\frac{1}{x^3}$

2) x^{-3} **5)** $2x^{-2}$ **8)** $-2x^{-3}$ **11)** $\frac{2}{x^2}$

3) x^{-4} **6)** $3x^{-3}$ **9)** $\frac{1}{x^2}$ **12)** $\frac{3}{x^3}$

5. Найдите производные (корни):

1) $\sqrt{x}$ **4)** $\sqrt[5]{x}$ **7)** $\frac{1}{\sqrt{x}}$ **10)** $x^{3/4}$

2) $\sqrt[3]{x}$ **5)** $2\sqrt{x}$ **8)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **11)** $x^{-1/2}$

3) $\sqrt[4]{x}$ **6)** $3\sqrt[3]{x}$ **9)** $x^{2/3}$ **12)** $x^{-2/3}$

6. Найдите производные (суммы и разности):

1) $x^2 + x^3$ **4)** $4x^5 - 5x^3$

2) $x^4 - x^2$ **5)** $x^2 + x + 1$

3) $2x^3 + 3x^2$ **6)** $x^3 - 2x^2 + x$

7) $\sqrt{x}+x$

8) $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

9) $x^{1/2}+x^{-1/2}$

10) $x^{2/3}-x^{1/3}$

11) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

12) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}$

Производная показательной функции

Теория

В этой главе мы научимся находить производную от показательной функции a^x и её самого важного частного случая — экспоненты e^x.

Запомните главные формулы:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$
$$(e^x)' = e^x$$

Что означают эти буквы?

- a — основание степени (положительное число, $a > 0$)
- $\ln a$ — натуральный логарифм числа a
- e^x — экспонента (показательная функция с основанием $e \approx 2.718$)

Как запомнить:

- Производная показательной функции — это она сама, умноженная на натуральный логарифм основания
- Для экспоненты $\ln e = 1$, поэтому производная e^x равна самой себе

Важно! В отличие от степенной функции, где степень была в основании (x^n), здесь степень в показателе (a^x). Не путайте эти два совершенно разных случая!

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Основание 2

Найдите производную:

$$f(x) = 2^x$$

По формуле $(a^x)' = a^x \ln a$ получаем:

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$$

Пример 2

Основание 2 с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 5 \cdot 2^x$$

По правилу вынесения константы и формуле для производной:

$$f'(x) = 5 \cdot 2^x \ln 2$$

Пример 3

Основание 3

Найдите производную:

$$f(x) = 3^x$$

Применяем формулу:

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$$

Пример 4

Основание 3 с отрицательным коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = -2 \cdot 3^x$$

Выносим константу и дифференцируем:

$$f'(x) = -2 \cdot 3^x \ln 3$$

Пример 5

Основание 10

Найдите производную:

$$f(x) = 10^x$$

По формуле:

$$f'(x) = 10^x \cdot \ln 10$$

Пример 6

Экспонента

Найдите производную:

$$f(x) = e^x$$

Для экспоненты $\ln e = 1$, поэтому:

$$f'(x) = e^x$$

Пример 7

Экспонента с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 7e^x$$

Выносим коэффициент:

$$f'(x) = 7e^x$$

Пример 8

Основание меньше 1

Найдите производную:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

По формуле:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Так как $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, можно записать:

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2$$

Пример 9

Сумма показательных функций

Найдите производную:

$$f(x) = 2^x + 3^x$$

По правилу суммы:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$$

Пример 10

Сумма с коэффициентами

Найдите производную:

$$f(x) = 2 \cdot 2^x + 5 \cdot 3^x$$

Применяем правило суммы и вынесение констант:

$$f'(x) = 2 \cdot 2^x \ln 2 + 5 \cdot 3^x \ln 3$$

Пример 11

Разность показательных функций

Найдите производную:

$$f(x) = e^x - 2^x$$

По правилу разности:

$$f'(x) = e^x - 2^x \ln 2$$

Пример 12

Сумма экспоненты и константы

Найдите производную:

$$f(x) = e^x + 7$$

Производная константы равна нулю, поэтому:

$$f'(x) = e^x$$

Пример 13

Смешанная сумма (степенная и показательная)

Найдите производную:

$$f(x) = x^3 + 2^x$$

Применяем правило суммы и формулы из двух глав:

$$f'(x) = 3x^2 + 2^x \ln 2$$

Пример 14

Смешанная сумма с коэффициентами

Найдите производную:

$$f(x) = 4x^5 - 3 \cdot 2^x$$

$$f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 2^x \ln 2 = 20x^4 - 3 \cdot 2^x \ln 2$$

Пример 15

Сумма трёх слагаемых разных типов

Найдите производную:

$$f(x) = 2x^3 + 5e^x - 4 \cdot 3^x$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 5e^x - 4 \cdot 3^x \ln 3 = 6x^2 + 5e^x - 4 \cdot 3^x \ln 3$$

Задачи

1. Найдите производные:

1) 2^x

2) 3^x

3) 4^x

4) 5^x

5) 6^x

6) 7^x

7) 8^x

8) 9^x

9) 10^x

10) 15^x

11) 20^x

12) 30^x

2. Найдите производные:

1) $2 \cdot 2^x$

2) $3 \cdot 3^x$

3) $4 \cdot 4^x$

4) $5 \cdot 5^x$

5) $10 \cdot 2^x$

6) $20 \cdot 3^x$

7) $-2 \cdot 2^x$

8) $-5 \cdot 3^x$

9) $\frac{1}{2} \cdot 2^x$

10) $\frac{1}{3} \cdot 3^x$

11) $\frac{2}{3} \cdot 4^x$

12) $\frac{3}{4} \cdot 5^x$

3. Найдите производные:

1) e^x

2) $2e^x$

3) $3e^x$

4) $5e^x$

5) $10e^x$

6) $100e^x$

7) $-e^x$

8) $-5e^x$

9) $\frac{1}{2}e^x$

10) $\frac{1}{3}e^x$

11) $\frac{2}{3}e^x$

12) $\frac{3}{4}e^x$

4. Найдите производные:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x$

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x$

5) $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^x$

8) $\left(\frac{3}{4}\right)^x$

5. Найдите производные:

1) $2^x + 3^x$

2) $2^x - 3^x$

3) $2^x + e^x$

4) $3^x + 4^x$

5) $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x$

6) $5 \cdot 2^x - 2 \cdot e^x$

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

8) $e^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

9) $2^x + 3^x + e^x$

6. Найдите производные (смешанные со степенными):

1) $x^2 + 2^x$

2) $x^3 - 3^x$

3) $2x^4 + 4^x$

4) $5x^2 - 3e^x$

5) $x^3 + 2^x + e^x$

6) $2x^5 - 3 \cdot 2^x + 4e^x$

Производная логарифмической функции

Теория

В этой главе мы научимся находить производную от логарифмической функции $\log_a x$ и её самого важного частного случая — натурального логарифма $\ln x$.

Запомните главные формулы:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Что означают эти буквы?

- a — основание логарифма ($a > 0, a \neq 1$)
- $\ln a$ — натуральный логарифм числа a
- $\ln x$ — натуральный логарифм (логарифм по основанию e)

Как запомнить:

- Производная натурального логарифма — это единица, делённая на x
- Для логарифма с другим основанием в знаменателе появляется дополнительный множитель $\ln a$

Важно! Область определения логарифма — $x > 0$. Поэтому и производная существует только при $x > 0$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Натуральный логарифм

Найдите производную:

$$f(x) = \ln x$$

По формуле $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ получаем:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Пример 2

Натуральный логарифм с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 5 \ln x$$

По правилу вынесения константы:

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

Пример 3

Натуральный логарифм с отрицательным коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = -3 \ln x$$

$$f'(x) = -3 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{3}{x}$$

Пример 4

Логарифм по основанию 2

Найдите производную:

$$f(x) = \log_2 x$$

По формуле $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ с $a = 2$:

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$$

Пример 5

Логарифм по основанию 2 с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 4 \log_2 x$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \frac{4}{x \ln 2}$$

Пример 6

Логарифм по основанию 10 (десятичный)

Найдите производную:

$$f(x) = \lg x$$

Напоминание: $\lg x = \log_{10} x$. Значит:

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

Пример 7

Логарифм по основанию 10 с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 2 \lg x$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$$

Пример 8

Логарифм по основанию 3

Найдите производную:

$$f(x) = \log_3 x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$$

Пример 9

Логарифм по основанию 3 с отрицательным коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = -2 \log_3 x$$

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x \ln 3} = -\frac{2}{x \ln 3}$$

Пример 10

Сумма логарифмов

Найдите производную:

$$f(x) = \ln x + \log_2 x$$

По правилу суммы:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln 2}$$

Пример 11

Разность логарифмов

Найдите производную:

$$f(x) = \ln x - \log_3 x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln 3}$$

Пример 12

Сумма с коэффициентами

Найдите производную:

$$f(x) = 2 \ln x + 3 \log_2 x$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x \ln 2}$$

Пример 13

Логарифм и константа

Найдите производную:

$$f(x) = \ln x + 7$$

Производная константы равна нулю:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Пример 14

Смешанная сумма (степенная и логарифмическая)

Найдите производную:

$$f(x) = x^3 + \ln x$$

По правилу суммы:

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

Пример 15

Смешанная сумма (показательная и логарифмическая)

Найдите производную:

$$f(x) = 2^x + \ln x$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x}$$

Задачи

1. Найдите производные:

1) $\ln x$
2) $\ln x$
3) $\ln x$
4) $\ln x$
5) $2\ln x$
6) $3\ln x$
7) $5\ln x$
8) $7\ln x$
9) $10\ln x$
10) $100\ln x$
11) $-\ln x$
12) $-5\ln x$

2. Найдите производные:

1) $\frac{1}{2}\ln x$
2) $\frac{1}{3}\ln x$
3) $\frac{1}{4}\ln x$
4) $\frac{1}{5}\ln x$
5) $\frac{2}{3}\ln x$
6) $\frac{3}{4}\ln x$
7) $\frac{4}{5}\ln x$
8) $\frac{5}{6}\ln x$

3. Найдите производные:

1) $\log_2 x$
2) $\log_3 x$
3) $\log_4 x$
4) $\log_5 x$
5) $\log_6 x$
6) $\log_7 x$
7) $\log_8 x$
8) $\log_9 x$
9) $\log_{10} x$
10) $\log_{15} x$
11) $\log_{20} x$
12) $\log_{100} x$

4. Найдите производные:

1) $2\log_2 x$
2) $3\log_3 x$
3) $4\log_4 x$
4) $5\log_5 x$
5) $2\lg x$
6) $3\lg x$
7) $5\lg x$
8) $10\lg x$
9) $-2\log_2 x$
10) $-3\log_3 x$
11) $-5\lg x$
12) $-\frac{1}{2}\log_2 x$

5. Найдите производные:

1) $\frac{1}{2}\log_2 x$
2) $\frac{1}{3}\log_3 x$
3) $\frac{1}{4}\log_4 x$
4) $\frac{1}{5}\log_5 x$
5) $\frac{2}{3}\log_2 x$
6) $\frac{3}{4}\log_3 x$
7) $\frac{4}{5}\log_4 x$
8) $\frac{5}{6}\log_5 x$

6. Найдите производные (суммы логарифмов):

1) $\ln x + \log_2 x$
2) $\ln x - \log_3 x$
3) $\log_2 x + \log_3 x$
4) $\log_2 x - \log_3 x$
5) $2\ln x + 3\log_2 x$
6) $5\ln x - 2\log_3 x$
7) $\lg x + \ln x$
8) $\lg x - \log_2 x$
9) $\ln x + \log_2 x + \log_3 x$
10) $2\ln x + \lg x - 3\log_2 x$

7. Найдите производные (смешанные со степенными и показательными):

1) $x^2 + \ln x$
2) $x^3 - \ln x$
3) $2^x + \ln x$
4) $3^x - \ln x$
5) $x^2 + 2^x + \ln x$
6) $2x^3 - 3^x + 5\ln x$
7) $4\ln x + 5x^2 - 2e^x$
8) $x^4 + 2^x - 3\ln x + 7$

Производные тригонометрических функций

Теория

В этой главе мы научимся находить производные от основных тригонометрических функций — синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Запомните главные формулы:

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Что означают эти буквы?

- $\sin x$ — синус икса
- $\cos x$ — косинус икса
- $\operatorname{tg} x$ — тангенс икса ($\frac{\sin x}{\cos x}$)
- $\operatorname{ctg} x$ — котангенс икса ($\frac{\cos x}{\sin x}$)

Как запомнить:

- Производная синуса — косинус
- Производная косинуса — минус синус
- Производная тангенса — единица, делённая на косинус в квадрате
- Производная котангенса — минус единица, делённая на синус в квадрате

Важно! Эти формулы нужно знать наизусть. Они будут использоваться постоянно.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Производная синуса

Найдите производную:

$$f(x) = \sin x$$

По формуле $(\sin x)' = \cos x$ получаем:

$$f'(x) = \cos x$$

Пример 2

Производная синуса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 3\sin x$$

По правилу вынесения константы:

$$f'(x) = 3\cos x$$

Пример 3

Производная синуса с отрицательным коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = -2\sin x$$

$$f'(x) = -2\cos x$$

Пример 4

Производная косинуса

Найдите производную:

$$f(x) = \cos x$$

По формуле $(\cos x)' = -\sin x$:

$$f'(x) = -\sin x$$

Пример 5

Производная косинуса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 5\cos x$$

$$f'(x) = 5 \cdot (-\sin x) = -5\sin x$$

Пример 6

Производная косинуса с отрицательным коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = -4\cos x$$

$$f'(x) = -4 \cdot (-\sin x) = 4\sin x$$

Пример 7

Производная тангенса

Найдите производную:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

По формуле $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Пример 8

Производная тангенса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 2\operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

Пример 9

Производная котангенса

Найдите производную:

$$f(x) = \operatorname{ctg} x$$

По формуле $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Пример 10

Производная котангенса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 3\operatorname{ctg} x$$

$$f'(x) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{3}{\sin^2 x}$$

Пример 11

Дробные коэффициенты

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos x$$

Пример 12

Сумма синуса и косинуса

Найдите производную:

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

По правилу суммы:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

Пример 13

Разность синуса и косинуса

Найдите производную:

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

Пример 14

Сумма тангенса и котангенса

Найдите производную:

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

Пример 15

Сумма с коэффициентами

Найдите производную:

$$f(x) = 2\sin x + 3\cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x - 3\sin x$$

Пример 16

Тригонометрические функции и константа

Найдите производную:

$$f(x) = \sin x + 5$$

Производная константы равна нулю:

$$f'(x) = \cos x$$

Пример 17

Смешанная сумма (степенная и тригонометрическая)

Найдите производную:

$$f(x) = x^3 + \sin x$$

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x$$

Пример 18

Смешанная сумма (показательная и тригонометрическая)

Найдите производную:

$$f(x) = 2^x + \cos x$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - \sin x$$

Пример 19

Смешанная сумма (логарифмическая и тригонометрическая)

Найдите производную:

$$f(x) = \ln x + \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

Пример 20

Сумма трёх слагаемых разных типов

Найдите производную:

$$f(x) = x^2 + e^x + \cos x$$

$$f'(x) = 2x + e^x - \sin x$$

Задачи

1. Найдите производные:

1) $\sin x$
2) $\cos x$
3) $\operatorname{tg} x$
4) $\operatorname{ctg} x$
5) $2\sin x$
6) $3\cos x$
7) $4\operatorname{tg} x$
8) $5\operatorname{ctg} x$
9) $10\sin x$
10) $10\cos x$
11) $10\operatorname{tg} x$
12) $10\operatorname{ctg} x$

2. Найдите производные:

1) $-2\sin x$
2) $-3\cos x$
3) $-4\operatorname{tg} x$
4) $-5\operatorname{ctg} x$
5) $-\sin x$
6) $-\cos x$
7) $-\operatorname{tg} x$
8) $-\operatorname{ctg} x$
9) $\frac{1}{2}\sin x$
10) $\frac{1}{3}\cos x$
11) $\frac{1}{4}\operatorname{tg} x$
12) $\frac{1}{5}\operatorname{ctg} x$

3. Найдите производные:

1) $\frac{2}{3}\sin x$
2) $\frac{3}{4}\cos x$
3) $\frac{4}{5}\operatorname{tg} x$
4) $\frac{5}{6}\operatorname{ctg} x$
5) $0.5\sin x$
6) $0.3\cos x$
7) $0.2\operatorname{tg} x$
8) $0.7\operatorname{ctg} x$

4. Найдите производные (суммы тригонометрических функций):

1) $\sin x + \cos x$
2) $\sin x - \cos x$
3) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$
4) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$
5) $2\sin x + 3\cos x$
6) $4\sin x - 5\cos x$
7) $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x$
8) $4\operatorname{tg} x - 5\operatorname{ctg} x$
9) $\sin x + \operatorname{tg} x$
10) $\cos x - \operatorname{ctg} x$
11) $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x$
12) $\sin x - \cos x + \operatorname{ctg} x$

5. Найдите производные (с константами):

1) $\sin x + 1$
2) $\cos x - 2$
3) $\operatorname{tg} x + 3$
4) $\operatorname{ctg} x - 4$
5) $2\sin x + 5$
6) $3\cos x - 6$
7) $4\operatorname{tg} x + 7$
8) $5\operatorname{ctg} x - 8$

6. Найдите производные (смешанные с другими функциями):

1) $x^2 + \sin x$
2) $x^3 - \cos x$
3) $2^x + \operatorname{tg} x$
4) $e^x - \operatorname{ctg} x$
5) $\ln x + \sin x$
6) $\log_2 x - \cos x$
7) $x^2 + 2^x + \sin x$
8) $x^3 - e^x + \cos x$
9) $2x^2 + 3\sin x - 4\ln x$
10) $5e^x - 2\operatorname{tg} x + 7$

Производные обратных тригонометрических функций

Теория

В этой главе мы научимся находить производные от обратных тригонометрических функций — арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

Запомните главные формулы:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Что означают эти буквы?

- $\arcsin x$ — арксинус икса (угол, синус которого равен x)
- $\arccos x$ — арккосинус икса
- $\operatorname{arctg} x$ — арктангенс икса
- $\operatorname{arcctg} x$ — арккотангенс икса

Как запомнить:

- Производные арксинуса и арккосинуса отличаются только знаком
- Производные арктангенса и арккотангенса тоже отличаются только знаком
- В знаменателе у арксинуса — квадратный корень, у арктангенса — сумма квадратов

Важно! Область определения арксинуса и арккосинуса: $x \in [-1, 1]$. Поэтому и производная существует только на этом интервале (внутри, не на концах).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Производная арксинуса

Найдите производную:

$$f(x) = \arcsin x$$

По формуле $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ получаем:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 2

Производная арксинуса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 3\arcsin x$$

По правилу вынесения константы:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 3

Производная арккосинуса

Найдите производную:

$$f(x) = \arccos x$$

По формуле $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 4

Производная арккосинуса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 4\arccos x$$

$$f'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 5

Производная арктангенса

Найдите производную:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

По формуле $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Пример 6

Производная арктангенса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 5\operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{5}{1+x^2}$$

Пример 7

Производная арккотангенса

Найдите производную:

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x$$

По формуле $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Пример 8

Производная арккотангенса с коэффициентом

Найдите производную:

$$f(x) = 2\operatorname{arcctg} x$$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2}{1+x^2}$$

Пример 9

Отрицательные коэффициенты

Найдите производную:

$$f(x) = -3\arcsin x$$

$$f'(x) = -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 10

Дробные коэффициенты

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Пример 11

Сумма арксинуса и арктангенса

Найдите производную:

$$f(x) = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$$

По правилу суммы:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

Пример 12

Разность арккосинуса и арккотангенса

Найдите производную:

$$f(x) = \arccos x - \operatorname{arcctg} x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

Пример 13

Сумма с коэффициентами

Найдите производную:

$$f(x) = 2\arcsin x + 3\operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2}$$

Пример 14

Обратные тригонометрические функции и константа

Найдите производную:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + 7$$

Производная константы равна нулю:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Пример 15

Смешанная сумма (степенная и арктангенс)

Найдите производную:

$$f(x) = x^3 + \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{1+x^2}$$

Пример 16

Смешанная сумма (показательная и арксинус)

Найдите производную:

$$f(x) = 2^x + \arcsin x$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 17

Смешанная сумма (логарифмическая и арктангенс)

Найдите производную:

$$f(x) = \ln x + \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}$$

Пример 18

Сумма трёх слагаемых разных типов

Найдите производную:

$$f(x) = x^2 + e^x + \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = 2x + e^x + \frac{1}{1+x^2}$$

Задачи

1. Найдите производные:

1) $\arcsin x$

2) $\arccos x$

3) $\operatorname{arctg} x$

4) $\operatorname{arcctg} x$

5) $2\arcsin x$

6) $3\arccos x$

7) $4\operatorname{arctg} x$

8) $5\operatorname{arcctg} x$

9) $10\arcsin x$

10) $10\operatorname{arctg} x$

11) $-2\arcsin x$

12) $-3\operatorname{arctg} x$

2. Найдите производные:

1) $-4\arccos x$

2) $-5\operatorname{arcctg} x$

3) $-\arcsin x$

4) $-\operatorname{arctg} x$

5) $\frac{1}{2}\arcsin x$

6) $\frac{1}{3}\arccos x$

7) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x$

8) $\frac{1}{5}\operatorname{arcctg} x$

9) $\frac{2}{3}\arcsin x$

10) $\frac{3}{4}\operatorname{arctg} x$

11) $0.5\arcsin x$

12) $0.2\,\mathrm{arctg}\,x$

3. Найдите производные:

1) $\arcsin x + \arccos x$

2) $\arcsin x - \arccos x$

3) $\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcctg}\,x$

4) $\mathrm{arctg}\,x - \mathrm{arcctg}\,x$

5) $\arcsin x + \mathrm{arctg}\,x$

6) $\arccos x - \mathrm{arcctg}\,x$

7) $2\arcsin x + 3\arccos x$

8) $4\,\mathrm{arctg}\,x - 5\,\mathrm{arcctg}\,x$

9) $\arcsin x + \mathrm{arctg}\,x + \arccos x$

10) $\arcsin x - \mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcctg}\,x$

4. Найдите производные:

1) $\arcsin x + 1$

2) $\arccos x - 2$

3) $\mathrm{arctg}\,x + 3$

4) $\mathrm{arcctg}\,x - 4$

5) $2\arcsin x + 5$

6) $3\arccos x - 6$

7) $4\,\mathrm{arctg}\,x + 7$

8) $5\,\mathrm{arcctg}\,x - 8$

5. Найдите производные:

1) $x^2 + \arcsin x$

2) $x^3 - \arccos x$

3) $2^x + \mathrm{arctg}\,x$

4) $e^x - \mathrm{arcctg}\,x$

5) $\ln x + \mathrm{arctg}\,x$

6) $\log_2 x - \arcsin x$

7) $x^2 + 2^x + \mathrm{arctg}\,x$

8) $x^3 - e^x + \arcsin x$

9) $2x^2 + 3\,\mathrm{arctg}\,x - 4\ln x$

10) $5e^x - 2\arcsin x + 7$

Производная произведения

Теория

В этой главе мы научимся находить производную от произведения двух функций. Это правило сложнее, чем для суммы, но его нужно обязательно запомнить.

Запомните правило:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Что означают эти буквы?

- u и v — любые функции, производные которых мы умеем находить
- Производная произведения равна: производная первой функции, умноженная на вторую, плюс первая функция, умноженная на производную второй

Как запомнить: "производная первой на вторую плюс первая на производную второй"

Важно! Порядок не важен — можно брать любую функцию за первую, а любую за вторую. Главное — не забыть про знак "плюс"между слагаемыми.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Произведение x^2 и x^3

Найдите производную:

$$f(x) = x^2 \cdot x^3$$

Конечно, можно сначала упростить: $x^2 \cdot x^3 = x^5$, и тогда $(x^5)' = 5x^4$. Но проверим правило произведения. Обозначим $u = x^2$, $v = x^3$. Тогда:

- $u' = 2x$
- $v' = 3x^2$

По формуле:

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$$

Результат совпадает.

Пример 2

Произведение x^2 и $\sin x$

Найдите производную:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

Обозначим $u = x^2$, $v = \sin x$. Тогда:

- $u' = 2x$
- $v' = \cos x$

Подставляем в формулу:

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Пример 3

Произведение $\sin x$ и $\cos x$

Найдите производную:

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

Обозначим $u = \sin x$, $v = \cos x$. Тогда:

- $u' = \cos x$
- $v' = -\sin x$

Подставляем:

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

Пример 4

Произведение x и $\ln x$

Найдите производную:

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

Обозначим $u = x$, $v = \ln x$. Тогда:

- $u' = 1$
- $v' = \frac{1}{x}$

Подставляем:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Пример 5

Произведение e^x и $\sin x$

Найдите производную:

$$f(x) = e^x \cdot \sin x$$

Обозначим $u = e^x$, $v = \sin x$. Тогда:

- $u' = e^x$
- $v' = \cos x$

Подставляем:

$$f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

Пример 6

Произведение 2^x и $\log_2 x$

Найдите производную:

$$f(x) = 2^x \cdot \log_2 x$$

Обозначим $u = 2^x$, $v = \log_2 x$. Тогда:

- $u' = 2^x \ln 2$
- $v' = \frac{1}{x \ln 2}$

Подставляем:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 \cdot \log_2 x + 2^x \cdot \frac{1}{x \ln 2}$$

Пример 7

Произведение $\sqrt{x}$ и $\operatorname{arctg} x$

Найдите производную:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$$

Обозначим $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $v = \operatorname{arctg} x$. Тогда:

- $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $v' = \frac{1}{1 + x^2}$

Подставляем:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arctg} x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

Пример 8

Произведение трёх функций?

Правило произведения работает только для двух функций. Если нужно найти производную от произведения трёх функций, например $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \cos x$, то нужно группировать:

$$f(x) = (x \cdot \sin x) \cdot \cos x$$

Сначала применяем правило произведения к $(x \sin x)$ и $\cos x$, а потом внутри ещё раз правило произведения к $x \sin x$:

$$f'(x) = (x \sin x)' \cdot \cos x + (x \sin x) \cdot (\cos x)'$$

Вычислим $(x \sin x)'$ отдельно: $(x \sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$.

Тогда:

$$f'(x) = (\sin x + x \cos x) \cos x + x \sin x \cdot (-\sin x) = \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x = \sin x \cos x + x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x \cos x + x \text{ co}$$

Пример 9

Произведение с константой

Найдите производную:

$$f(x) = 3x^2 \cdot \sin x$$

Константу можно вынести, но она уже часть произведения. Можно считать $u = 3x^2$, $v = \sin x$:

$$u' = 6x, \quad v' = \cos x$$

$$f'(x) = 6x \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x$$

Пример 10

Проверка для частного случая

Если одна из функций — константа, то формула произведения должна давать тот же результат, что и вынесение константы. Проверим для $f(x) = 5 \cdot x^2$: По правилу произведения: $u = 5$, $v = x^2$, $u' = 0$, $v' = 2x$:

$$f'(x) = 0 \cdot x^2 + 5 \cdot 2x = 10x$$

По правилу вынесения константы: $5 \cdot (x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$ — совпадает.

Задачи

1. Найдите производные (произведение степенных функций):

1) $x^2 \cdot x^3$

2) $x^3 \cdot x^4$

3) $x \cdot x^5$

4) $x^{-2} \cdot x^3$

5) $\sqrt{x} \cdot x^2$

6) $\frac{1}{x} \cdot x^4$

2. Найдите производные (степенная и тригонометрическая):

1) $x \cdot \sin x$

2) $x \cdot \cos x$

3) $x^2 \cdot \sin x$

4) $x^2 \cdot \cos x$

5) $x^3 \cdot \sin x$

6) $x^3 \cdot \cos x$

7) $\sqrt{x} \cdot \sin x$

8) $\sqrt{x} \cdot \cos x$

9) $\frac{1}{x} \cdot \sin x$

10) $\frac{1}{x} \cdot \cos x$

3. Найдите производные (экспонента и тригонометрические):

1) $e^x \cdot \sin x$

2) $e^x \cdot \cos x$

3) $e^x \cdot \operatorname{tg} x$

4) $2^x \cdot \sin x$

5) $2^x \cdot \cos x$

6) $3^x \cdot \sin x$

7) $3^x \cdot \cos x$

8) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot \sin x$

4. Найдите производные (логарифмы и обратные тригонометрические):

1) $x \cdot \ln x$

2) $x^2 \cdot \ln x$

3) $\sqrt{x} \cdot \ln x$

4) $e^x \cdot \ln x$

5) $2^x \cdot \log_2 x$

6) $x \cdot \operatorname{arctg} x$

7) $x \cdot \arcsin x$

8) $e^x \cdot \operatorname{arctg} x$

9) $\ln x \cdot \operatorname{arctg} x$

10) $\sin x \cdot \ln x$

5. Найдите производные (произведение трёх функций):

1) $x \cdot \sin x \cdot \cos x$

2) $x^2 \cdot e^x \cdot \sin x$

3) $x \cdot \ln x \cdot \sin x$

4) $e^x \cdot \sin x \cdot \cos x$

5) $x \cdot 2^x \cdot \ln x$

6) $x^2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

6. Найдите производные (с коэффициентами):

1) $2x \cdot \sin x$

2) $3x^2 \cdot \cos x$

3) $5x^3 \cdot e^x$

4) $4\sqrt{x} \cdot \ln x$

5) $\dfrac{1}{2}x \cdot \operatorname{arctg} x$

6) $\dfrac{2}{3}x^2 \cdot \arcsin x$

7) $3 \cdot 2^x \cdot \sin x$

8) $5 \cdot e^x \cdot \cos x$

Производная частного

Теория

В этой главе мы научимся находить производную от частного двух функций.

Запомните правило:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Что означают эти буквы?

- u — числитель (верхняя функция)
- v — знаменатель (нижняя функция), причём $v \neq 0$
- Производная частного равна: производная числителя на знаменатель минус числитель на производную знаменателя, и всё это делённое на квадрат знаменателя

Как запомнить: "производная верха на низ минус верх на производную низа, и всё делить на низ в квадрате"

Важно! Не путайте порядок: именно "минус а не "плюс". И не забывайте про квадрат знаменателя.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Частное $\dfrac{x^3}{x^2}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2}$$

Конечно, можно сначала упростить: $\dfrac{x^3}{x^2} = x$, и тогда $(x)' = 1$. Но проверим правило частного.

Обозначим $u = x^3$, $v = x^2$. Тогда:

- $u' = 3x^2$
- $v' = 2x$

По формуле:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4}{x^4} = \frac{x^4}{x^4} = 1$$

Результат совпадает.

Пример 2

Частное $\dfrac{x^2}{\sin x}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$$

Обозначим $u = x^2$, $v = \sin x$. Тогда:

- $u' = 2x$
- $v' = \cos x$

Подставляем в формулу:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

Пример 3

Частное $\dfrac{\sin x}{\cos x}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Обозначим $u = \sin x$, $v = \cos x$. Тогда:

- $u' = \cos x$
- $v' = -\sin x$

Подставляем:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

Заметим, что это производная тангенса, которую мы уже знаем: $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Пример 4

Частное $\dfrac{\ln x}{x}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Обозначим $u = \ln x$, $v = x$. Тогда:

- $u' = \dfrac{1}{x}$
- $v' = 1$

Подставляем:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Пример 5

Частное $\dfrac{e^x}{\sin x}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$$

Обозначим $u = e^x$, $v = \sin x$. Тогда:

- $u' = e^x$
- $v' = \cos x$

Подставляем:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

Пример 6

Частное $\dfrac{x}{e^x}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Обозначим $u = x$, $v = e^x$. Тогда:

- $u' = 1$
- $v' = e^x$

Подставляем:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

Пример 7

Частное $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

Обозначим $u = \operatorname{arctg} x$, $v = x$. Тогда:

- $u' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $v' = 1$

Подставляем:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x - \operatorname{arctg} x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2}$$

Пример 8

Частное $\dfrac{2^x}{x^2}$

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{2^x}{x^2}$$

Обозначим $u = 2^x$, $v = x^2$. Тогда:

- $u' = 2^x \ln 2$
- $v' = 2x$

Подставляем:

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x^2 - 2^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2^x(x^2 \ln 2 - 2x)}{x^4} = \frac{2^x \cdot x(x \ln 2 - 2)}{x^4} = \frac{2^x(x \ln 2 - 2)}{x^3}$$

Пример 9

Частное с константой в числителе

Найдите производную:

$$f(x) = \frac{5}{x^2}$$

Можно рассматривать как $\dfrac{5}{x^2}$ с $u = 5$, $v = x^2$:

- $u' = 0$
- $v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 5 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-10x}{x^4} = -\frac{10}{x^3}$$

Это совпадает с правилом вынесения константы: $5 \cdot (x^{-2})' = 5 \cdot (-2x^{-3}) = -\dfrac{10}{x^3}$.

Пример 10

Проверка для частного случая

Если числитель — константа, формула частного даёт тот же результат, что и преобразование к отрицательной степени. Проверим для $\dfrac{3}{x}$: По правилу частного: $u = 3$, $v = x$, $u' = 0$, $v' = 1$:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 3 \cdot 1}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$$

По правилу степени: $3 \cdot (x^{-1})' = 3 \cdot (-x^{-2}) = -\dfrac{3}{x^2}$ — совпадает.

Задачи

1. Найдите производные:

1) $\frac{x^3}{x^2}$

2) $\frac{x^4}{x^2}$

3) $\frac{x^5}{x^3}$

4) $\frac{x^2}{x^4}$

5) $\frac{x^{-2}}{x^3}$

6) $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$

2. Найдите производные:

1) $\frac{\sin x}{\cos x}$

2) $\frac{\cos x}{\sin x}$

3) $\frac{\sin x}{x}$

4) $\frac{\cos x}{x}$

5) $\frac{x}{\sin x}$

6) $\frac{x}{\cos x}$

7) $\frac{\sin x}{x^2}$

8) $\frac{\cos x}{x^2}$

9) $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

10) $\frac{\operatorname{ctg} x}{x}$

3. Найдите производные:

1) $\frac{e^x}{x}$

2) $\frac{x}{e^x}$

3) $\frac{e^x}{\sin x}$

4) $\frac{e^x}{\cos x}$

5) $\frac{2^x}{x}$

6) $\frac{x}{2^x}$

7) $\frac{2^x}{\sin x}$

8) $\frac{3^x}{\cos x}$

9) $\frac{e^x}{x^2}$

10) $\frac{2^x}{x^2}$

4. Найдите производные:

1) $\frac{\ln x}{x}$

2) $\frac{x}{\ln x}$

3) $\frac{\ln x}{x^2}$

4) $\frac{\ln x}{\sin x}$

5) $\frac{\ln x}{e^x}$

6) $\frac{\ln x}{2^x}$

7) $\frac{\log_2 x}{x}$

8) $\frac{\lg x}{x}$

5. Найдите производные:

1) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

2) $\frac{x}{\operatorname{arctg} x}$

3) $\frac{\arcsin x}{x}$

4) $\frac{x}{\arcsin x}$

5) $\frac{\operatorname{arctg} x}{e^x}$

6) $\frac{\arcsin x}{\sin x}$

7) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ — подумайте

8) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ — подумайте

6. Найдите производные:

1) $\dfrac{x^2+1}{x}$

2) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

3) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}$

4) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x}$

5) $\dfrac{x\ln x}{x+1}$

6) $\dfrac{xe^x}{\sin x}$

7) $\dfrac{2^x\ln x}{x^2}$

8) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

Практика по блоку 1

Теория

В этом блоке мы изучили все основные правила дифференцирования:

- **Таблица производных:**
  - $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
  - $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$
  - $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
  - $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
  - $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
  - $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- **Правила:**
  - Вынесение константы: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
  - Сумма и разность: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
  - Произведение: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
  - Частное: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

В этой главе собраны задачи на все эти правила вперемешку. Ваша задача — определить, какое правило нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Найдите производные (степенные функции):

1) x^5
2) $3x^4$
3) $-2x^6$
4) $\dfrac{1}{2}x^3$
5) x^{-3}
6) $2x^{-4}$
7) $\sqrt{x}$
8) $5\sqrt{x}$
9) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
10) $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$
11) $x^{2/3}$
12) $4x^{-1/2}$

2. Найдите производные (показательные функции):

1) 2^x
2) $3 \cdot 2^x$
3) $-5 \cdot 3^x$
4) $\dfrac{1}{2} \cdot 4^x$
5) e^x
6) $4e^x$
7) $-2e^x$
8) $\dfrac{1}{3}e^x$
9) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
10) $2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$
11) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$
12) $5 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

3. Найдите производные (логарифмические функции):

1) $\ln x$
2) $3 \ln x$
3) $-2 \ln x$
4) $\dfrac{1}{2} \ln x$
5) $\log_2 x$
6) $4 \log_2 x$
7) $-3 \log_3 x$
8) $\lg x$
9) $2 \lg x$
10) $\log_5 x$
11) $\dfrac{1}{3} \log_4 x$
12) $-\dfrac{1}{2} \log_3 x$

4. Найдите производные (тригонометрические функции):

1) $\sin x$
2) $2\sin x$
3) $-3\cos x$
4) $\frac{1}{2}\sin x$
5) $\cos x$
6) $4\cos x$
7) $-5\sin x$
8) $\operatorname{tg} x$
9) $3\operatorname{tg} x$
10) $-2\operatorname{ctg} x$
11) $\operatorname{ctg} x$
12) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

5. Найдите производные (обратные тригонометрические):

1) $\arcsin x$
2) $2\arcsin x$
3) $-3\arccos x$
4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$
5) $\arccos x$
6) $4\arccos x$
7) $-2\operatorname{arctg} x$
8) $\operatorname{arctg} x$
9) $3\operatorname{arctg} x$
10) $-5\operatorname{arcctg} x$
11) $\operatorname{arcctg} x$
12) $\frac{1}{3}\arcsin x$

6. Найдите производные (суммы и разности):

1) $x^2 + x^3$
2) $2x^3 - 3x^2$
3) $x^2 + \sin x$
4) $x^3 - \cos x$
5) $2^x + \ln x$
6) $e^x - \sin x$
7) $\ln x + \operatorname{arctg} x$
8) $\sin x + \cos x$
9) $x^2 + 2^x + \ln x$
10) $x^3 - e^x + \cos x$
11) $2\sin x + 3\cos x - 4\ln x$
12) $x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

7. Найдите производные (произведения):

1) $x \cdot \sin x$
2) $x^2 \cdot \cos x$
3) $x \cdot \ln x$
4) $e^x \cdot \sin x$
5) $2^x \cdot \ln x$
6) $\sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$
7) $\sin x \cdot \cos x$
8) $x \cdot e^x \cdot \sin x$
9) $x^2 \cdot 2^x \cdot \ln x$
10) $x \cdot \ln x \cdot \sin x$
11) $3x^2 \cdot e^x$
12) $\frac{1}{2}x \cdot \ln x$

8. Найдите производные (частные):

1) $\frac{x}{\sin x}$
2) $\frac{\sin x}{x}$
3) $\frac{x}{\ln x}$
4) $\frac{\ln x}{x}$
5) $\frac{e^x}{\sin x}$
6) $\frac{x}{e^x}$
7) $\frac{2^x}{x^2}$
8) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$
9) $\frac{x^2+1}{x}$
10) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$
11) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$
12) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

9. Найдите производные:

1) $x^2 \sin x$

2) $x^3 \ln x$

3) $\dfrac{x^2}{\cos x}$

4) $\dfrac{e^x}{x^2+1}$

5) $2^x \sin x + \cos x$

6) $x \ln x - x$

7) $\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{\ln x}$

8) $e^x(\sin x + \cos x)$

9) $\dfrac{xe^x}{\sin x}$

10) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

11) $\sqrt{x}\ln x - \sqrt{x}$

12) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ (упростите сначала)

Производная сложной функции

Теория

В этой главе мы научимся находить производную от сложной функции — функции вида $f(g(x))$. Это одно из самых важных правил дифференцирования.

Запомните правило:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Что означают эти буквы?

- $g(x)$ — внутренняя функция
- $f(u)$ — внешняя функция, где $u = g(x)$
- Производная сложной функции равна: производная внешней функции, вычисленная в точке $g(x)$, умноженная на производную внутренней функции

Как запомнить: "производная внешней, умноженная на производную внутренней"

Другая запись: если $y = f(u)$, а $u = g(x)$, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Важно! Это правило работает для цепочки любой длины. Например, для $f(g(h(x)))$:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Степенная функция от линейного выражения

Найдите производную:

$$f(x) = (2x+1)^5$$

Здесь внешняя функция: $f(u) = u^5$, внутренняя: $u = 2x + 1$.

- $f'(u) = 5u^4$
- $u' = 2$

По правилу:

$$f'(x) = 5(2x+1)^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$$

Пример 2

Корень от линейного выражения

Найдите производную:

$$f(x) = \sqrt{3x-2}$$

Внешняя функция: $f(u) = \sqrt{u} = u^{1/2}$, внутренняя: $u = 3x - 2$.

- $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$
- $u' = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

Пример 3

Экспонента от линейного выражения

Найдите производную:

$$f(x) = e^{5x+1}$$

Внешняя функция: $f(u) = e^u$, внутренняя: $u = 5x + 1$.

- $f'(u) = e^u$
- $u' = 5$

$$f'(x) = e^{5x+1} \cdot 5 = 5e^{5x+1}$$

Пример 4

Синус от линейного выражения

Найдите производную:

$$f(x) = \sin(2x - 3)$$

Внешняя функция: $f(u) = \sin u$, внутренняя: $u = 2x - 3$.

- $f'(u) = \cos u$
- $u' = 2$

$$f'(x) = \cos(2x - 3) \cdot 2 = 2\cos(2x - 3)$$

Пример 5

Логарифм от линейного выражения

Найдите производную:

$$f(x) = \ln(4x + 1)$$

Внешняя функция: $f(u) = \ln u$, внутренняя: $u = 4x + 1$.

- $f'(u) = \dfrac{1}{u}$
- $u' = 4$

$$f'(x) = \frac{1}{4x + 1} \cdot 4 = \frac{4}{4x + 1}$$

Пример 6

Арктангенс от линейного выражения

Найдите производную:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(3x)$$

Внешняя функция: $f(u) = \operatorname{arctg} u$, внутренняя: $u = 3x$.

- $f'(u) = \dfrac{1}{1 + u^2}$
- $u' = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1 + 9x^2}$$

Пример 7

Степенная функция от синуса

Найдите производную:

$$f(x) = \sin^3 x$$

Запись $\sin^3 x$ означает $(\sin x)^3$. Внешняя функция: $f(u) = u^3$, внутренняя: $u = \sin x$.

- $f'(u) = 3u^2$
- $u' = \cos x$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

Пример 8

Корень от логарифма

Найдите производную:

$$f(x) = \sqrt{\ln x}$$

Внешняя функция: $f(u) = \sqrt{u} = u^{1/2}$, внутренняя: $u = \ln x$.

- $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$
- $u' = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Пример 9

Двойная сложность

Найдите производную:

$$f(x) = e^{\sin 2x}$$

Здесь цепочка: e^u, где $u = \sin v$, а $v = 2x$.

- Внешняя: $f(u) = e^u$, $f'(u) = e^u$
- Средняя: $u = \sin v$, $u'_v = \cos v$
- Внутренняя: $v = 2x$, $v' = 2$

По правилу цепочки:

$$f'(x) = e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$$

Пример 10

Сложная функция с произведением

Найдите производную:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin 3x$$

Здесь нужно применить правило произведения, а внутри — правило сложной функции:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \sin 3x + x^2 \cdot (\sin 3x)' = 2x \cdot \sin 3x + x^2 \cdot \cos 3x \cdot 3 = 2x\sin 3x + 3x^2\cos 3x$$

Задачи

1. Найдите производные (линейная внутренняя функция):

1) $(2x+1)^3$

2) $(3x-2)^4$

3) $(5x+1)^{-2}$

4) $\sqrt{4x+3}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

6) e^{3x+2}

7) e^{-2x+1}

8) 2^{5x-1}

9) $\sin(2x+1)$

10) $\cos(3x-2)$

11) $\ln(4x+3)$

12) $\operatorname{arctg}(5x)$

2. Найдите производные (степень от функции):

1) $\sin^2 x$

2) $\sin^3 x$

3) $\cos^2 x$

4) $\cos^4 x$

5) $\ln^2 x$

6) $\ln^3 x$

7) $\operatorname{arctg}^2 x$

8) e^{x^2}

9) $2^{\sin x}$

10) $(x^2+1)^3$

11) $(\ln x)^4$

12) $(\sin x)^5$

3. Найдите производные (тригонометрические от функций):

1) $\sin(x^2)$

2) $\cos(x^3)$

3) $\sin(\ln x)$

4) $\cos(\ln x)$

5) $\sin(e^x)$

6) $\cos(2^x)$

7) $\operatorname{tg}(\sqrt{x})$

8) $\operatorname{ctg}(\frac{1}{x})$

9) $\sin^2(2x)$

10) $\cos^3(3x)$

11) $\sin(\cos x)$

12) $\cos(\sin x)$

4. Найдите производные (логарифмы от функций):

1) $\ln(x^2+1)$

2) $\ln(\sin x)$

3) $\ln(\cos x)$

4) $\ln(\ln x)$

5) $\ln(e^x+1)$

6) $\log_2(x^2+1)$

7) $\ln(\sqrt{x})$

8) $\ln(\operatorname{arctg} x)$

9) $\ln^2(\sin x)$

10) $\ln(\sin^2 x)$

11) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

12) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

5. Найдите производные (экспоненты от функций):

1) e^{x^2}

2) $e^{\sin x}$

3) $e^{\cos x}$

4) $e^{\ln x}$

5) $e^{\operatorname{arctg} x}$

6) 2^{x^2}

7) $3^{\sin x}$

8) $e^{\sqrt{x}}$

9) e^{e^x}

10) 2^{2^x}

11) $e^{\sin^2 x}$

12) $e^{\ln^2 x}$

6. Найдите производные:

1) $x \cdot \sin 2x$

2) $x^2 \cdot e^{3x}$

3) $e^x \cdot \sin 2x$

4) $\sin x \cdot \cos 2x$

5) $\dfrac{\sin 2x}{x}$

6) $\dfrac{x}{\cos 3x}$

7) $\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

8) $\dfrac{e^{2x}}{\sin x}$

9) $x^2 \cdot \ln(x^2+1)$

10) $e^x \cdot \ln(\sin x)$

11) $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

12) $\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$

Уравнение касательной и нормали

Теория

В этой главе мы научимся применять производную для составления уравнений касательной и нормали к графику функции. Это одно из важнейших геометрических приложений производной.

Касательная

Определение: Касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 — это прямая, которая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеет угловой коэффициент, равный производной функции в этой точке.

Уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Что означают эти буквы?

- x_0 — абсцисса точки касания
- $f(x_0)$ — значение функции в этой точке
- $f'(x_0)$ — значение производной в этой точке (угловой коэффициент касательной)

Нормаль

Определение: Нормаль к графику функции в точке — это прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через ту же точку.

Уравнение нормали:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Угловой коэффициент нормали равен $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$ (при условии, что $f'(x_0) \neq 0$).

Особые случаи:

- Если $f'(x_0) = 0$ (касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и её уравнение: $x = x_0$
- Если производная не существует, то касательная вертикальна: $x = x_0$, а нормаль горизонтальна: $y = f(x_0)$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Касательная к параболе

Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$.
Вычисляем:

- $f(1) = 1^2 = 1$
- $f'(x) = 2x$, значит $f'(1) = 2$

Подставляем в уравнение касательной:

$$y = 1 + 2(x - 1) = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

Ответ: $y = 2x - 1$.

Пример 2

Касательная к синусоиде

Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
Вычисляем:

- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

- $f'(x) = \cos x$, значит $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Подставляем в уравнение касательной:

$$y = 1 + 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Касательная горизонтальна: $y = 1$.

Пример 3

Нормаль к параболе

Найдите уравнение нормали к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$.
Из примера 1: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$.
Угловой коэффициент нормали: $k_{\text{норм}} = -\frac{1}{2}$.
Подставляем в уравнение нормали:

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Ответ: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Пример 4

Нормаль к экспоненте

Найдите уравнение нормали к графику функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$.
Вычисляем:

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(x) = e^x$, значит $f'(0) = 1$

Угловой коэффициент нормали: $k_{\text{норм}} = -1$.
Уравнение нормали:

$$y = 1 - 1 \cdot (x - 0) = 1 - x$$

Ответ: $y = 1 - x$.

Пример 5

Особый случай: горизонтальная касательная

Для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ мы нашли касательную $y = 1$. Найдём нормаль.
Так как $f'(x_0) = 0$, нормаль вертикальна и проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.
Уравнение нормали: $x = \frac{\pi}{2}$.

Пример 6

Особый случай: вертикальная касательная

Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 0$ производная не существует (бесконечна). Касательная вертикальна: $x = 0$. Нормаль горизонтальна: $y = 0$.

Пример 7

Касательная к логарифму

Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln x$ в точке $x_0 = e$.
Вычисляем:

- $f(e) = \ln e = 1$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$, значит $f'(e) = \frac{1}{e}$

Уравнение касательной:
$$y = 1 + \frac{1}{e}(x - e) = 1 + \frac{x}{e} - 1 = \frac{x}{e}$$
Ответ: $y = \dfrac{x}{e}$.

Пример 8

Касательная и нормаль к сложной функции

Найдите уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = \sin 2x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
Вычисляем:
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
- $f'(x) = 2\cos 2x$, значит $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 0 = 0$

Касательная горизонтальна: $y = 1$.
Нормаль вертикальна: $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 9

Точка пересечения касательной с осями

Для функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$ (касательная $y = 2x - 1$) найдём точки пересечения с осями.
С осью Oy: $x = 0 \Rightarrow y = -1$. Точка $(0, -1)$.
С осью Ox: $y = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Точка $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Задачи

1. Найдите уравнение касательной к графику функции в указанной точке:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

2) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

6) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

7) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$

8) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

9) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$

10) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$

11) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $x_0 = 3$

12) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$

2. Найдите уравнение нормали к графику функции в указанной точке:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

2) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

6) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

7) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$

8) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

9) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$

10) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$

11) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $x_0 = 3$

12) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$

3. Найдите угол между касательной к графику функции в указанной точке и осью Ox:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

2) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$

3) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

4) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

5) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

6) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$

4. Найдите точки, в которых касательная к графику функции параллельна заданной прямой:

1) $f(x) = x^2$, прямая $y = 2x + 1$

2) $f(x) = x^3$, прямая $y = 3x - 2$

3) $f(x) = \sin x$, прямая $y = x$

4) $f(x) = e^x$, прямая $y = x$

5) $f(x) = \ln x$, прямая $y = \frac{1}{2}x$

6) $f(x) = \sqrt{x}$, прямая $y = \frac{1}{4}x + 3$

5. Найдите точки пересечения касательной с осями координат:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

2) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$

5) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

6) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$

6. Найдите уравнение касательной к графику функции, проходящей через заданную точку (не обязательно точку касания):

1) $f(x) = x^2$, точка $(0, -1)$

2) $f(x) = x^2$, точка $(2, 0)$

3) $f(x) = \sqrt{x}$, точка $(0, 1)$

4) $f(x) = \ln x$, точка $(0, 1)$

5) $f(x) = e^x$, точка $(0, 0)$

6) $f(x) = \frac{1}{x}$, точка $(1, 2)$

Монотонность и экстремумы

Теория

В этой главе мы научимся исследовать функции на монотонность (возрастание и убывание) и находить точки экстремума (минимума и максимума) с помощью производной.

Монотонность

Признак возрастания: Если $f'(x) > 0$ на интервале (a, b), то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Признак убывания: Если $f'(x) < 0$ на интервале (a, b), то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Если $f'(x) = 0$ на интервале, то функция постоянна (константа).

Критические точки

Определение: Критическими точками функции называются точки, в которых производная равна нулю или не существует.

Для нахождения экстремумов мы будем искать критические точки и исследовать знак производной вокруг них.

Экстремумы (максимумы и минимумы)

Необходимое условие экстремума: Если в точке x_0 функция имеет экстремум, то x_0 — критическая точка (производная равна нулю или не существует).

Достаточное условие (первое правило):

- Если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак с + на −, то x_0 — точка максимума
- Если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак с − на +, то x_0 — точка минимума
- Если знак производной не меняется, то экстремума нет

Достаточное условие (второе правило): Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума. (Это правило работает только если вторая производная существует и не равна нулю.)

Схема исследования

1. Находим область определения функции
2. Находим производную $f'(x)$
3. Находим критические точки: $f'(x) = 0$ и точки, где $f'(x)$ не существует
4. Отмечаем критические точки на области определения и определяем знак производной на каждом интервале
5. По знаку производной определяем промежутки возрастания/убывания
6. По изменению знака определяем точки экстремума
7. Вычисляем значения функции в точках экстремума

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Квадратичная функция

Исследуйте функцию $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на монотонность и экстремумы.

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}$
2. Производная: $f'(x) = 2x - 4$
3. Критические точки: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
4. Исследуем знак производной:

- При $x < 2$: $f'(x) < 0$ (например, $x = 0$: $f'(0) = -4 < 0$)
- При $x > 2$: $f'(x) > 0$ (например, $x = 3$: $f'(3) = 2 > 0$)

5. Вывод:

- Функция убывает на интервале $(-\infty, 2)$
- Функция возрастает на интервале $(2, +\infty)$
- В точке $x = 2$ производная меняет знак с $-$ на $+$, значит $x = 2$ — точка минимума

6. Значение функции в точке минимума: $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$

Ответ: минимум $f(2) = -1$, убывает на $(-\infty, 2)$, возрастает на $(2, +\infty)$.

Пример 2

Кубическая функция

Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на монотонность и экстремумы.

1. Область определения: $x \in \mathbb{R}$

2. Производная: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

3. Критические точки: $x = -1$ и $x = 1$

4. Исследуем знак производной на интервалах:

- $(-\infty, -1)$: возьмём $x = -2$, $f'(-2) = 3(4 - 1) = 9 > 0$
- $(-1, 1)$: возьмём $x = 0$, $f'(0) = -3 < 0$
- $(1, +\infty)$: возьмём $x = 2$, $f'(2) = 3(4 - 1) = 9 > 0$

5. Вывод:

- Возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$
- Убывает на $(-1, 1)$
- При $x = -1$ знак меняется с $+$ на $-$ — точка максимума
- При $x = 1$ знак меняется с $-$ на $+$ — точка минимума

6. Значения:

- $f(-1) = -1 + 3 = 2$ — максимум
- $f(1) = 1 - 3 = -2$ — минимум

Пример 3

Функция с корнем

Исследуйте функцию $f(x) = x\sqrt{1 - x}$ на монотонность и экстремумы.

1. Область определения: $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

2. Производная: по правилу произведения

$$f'(x) = \sqrt{1 - x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1 - x}} = \sqrt{1 - x} - \frac{x}{2\sqrt{1 - x}}$$

Приводим к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{2(1 - x) - x}{2\sqrt{1 - x}} = \frac{2 - 2x - x}{2\sqrt{1 - x}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}$$

3. Критические точки:

- Производная равна нулю: $2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$
- Производная не существует: знаменатель равен нулю при $x = 1$ (граница области определения)

4. Исследуем знак производной на интервалах области определения $(-\infty, 1]$:

- $(-\infty, \frac{2}{3})$: возьмём $x = 0$, $f'(0) = \dfrac{2}{2} = 1 > 0$
- $(\frac{2}{3}, 1)$: возьмём $x = 0.8$, $f'(0.8) = \dfrac{2 - 2.4}{2\sqrt{0.2}} = \dfrac{-0.4}{0.894} < 0$

5. Вывод:

- Возрастает на $(-\infty, \frac{2}{3})$
- Убывает на $(\frac{2}{3}, 1)$

- В точке $x = \frac{2}{3}$ производная меняет знак с + на – — точка максимума

6. Значение: $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Пример 4

Использование второй производной

Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ с помощью второй производной.

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

2. Критические точки: $x = 0$ и $x = 2$

3. $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

4. Проверяем:
- $f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ в точке $x = 0$ максимум
- $f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ в точке $x = 2$ минимум

5. Значения: $f(0) = 2$, $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$

Пример 5

Функция без экстремумов

Исследуйте функцию $f(x) = x^3$ на монотонность и экстремумы.

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ для всех x, причём $f'(x) = 0$ только в точке $x = 0$. Знак производной не меняется (всегда неотрицательна). Значит, функция возрастает на всей области определения, экстремумов нет.

Задачи

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 1$

3) $f(x) = x^3 - 3x$

4) $f(x) = x^3 + 3x^2$

5) $f(x) = x^4 - 2x^2$

6) $f(x) = x^4 - 4x^3$

7) $f(x) = \frac{1}{x}$

8) $f(x) = \sqrt{x}$

9) $f(x) = \ln x$

10) $f(x) = e^x$

11) $f(x) = \sin x$ на $[0, 2\pi]$

12) $f(x) = \cos x$ на $[0, 2\pi]$

2. Найдите точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2$

4) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

5) $f(x) = x^4 - 2x^2$

6) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

7) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

8) $f(x) = x \ln x$

9) $f(x) = xe^{-x}$

10) $f(x) = x^2 e^{-x}$

11) $f(x) = \sin x + \cos x$ на $[0, 2\pi]$

12) $f(x) = \sin 2x$ на $[0, \pi]$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ [0,3]$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ [-2,2]$

3) $f(x) = x^4 - 2x^2,\ [-1,2]$

4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1},\ [0,2]$

5) $f(x) = x\ln x,\ [1,e]$

6) $f(x) = e^{-x}\sin x,\ [0,\pi]$

4. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = x^3 - 3x$

3) $f(x) = x^4 - 2x^2$

4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

5) $f(x) = x\ln x$

6) $f(x) = xe^{-x}$

Выпуклость и точки перегиба

Теория

В этой главе мы научимся исследовать функции на выпуклость и находить точки перегиба с помощью второй производной.

Выпуклость

Определение: Функция называется выпуклой вниз (или вогнутой вверх) на интервале, если её график лежит выше касательной в любой точке этого интервала. Функция называется выпуклой вверх (или вогнутой вниз), если её график лежит ниже касательной.

Признак выпуклости с помощью второй производной:

- Если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то функция выпукла вниз (график "улыбается")
- Если $f''(x) < 0$ на интервале (a, b), то функция выпукла вверх (график "грустит")

Точки перегиба

Определение: Точка x_0 называется точкой перегиба функции $f(x)$, если в этой точке меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: Если x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие: Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 — точка перегиба.

Схема исследования на выпуклость и точки перегиба

1. Находим область определения функции
2. Находим вторую производную $f''(x)$
3. Находим точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует
4. Отмечаем эти точки на области определения и определяем знак второй производной на каждом интервале
5. По знаку определяем промежутки выпуклости вверх ($f'' < 0$) и вниз ($f'' > 0$)
6. Точки, где знак меняется, являются точками перегиба
7. Вычисляем значения функции в точках перегиба

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Квадратичная функция

Исследуйте функцию $f(x) = x^2$ на выпуклость.

1. $f'(x) = 2x$
2. $f''(x) = 2 > 0$ для всех x

Значит, функция выпукла вниз на всей области определения. Точек перегиба нет.

Пример 2

Кубическая функция

Исследуйте функцию $f(x) = x^3$ на выпуклость и найдите точки перегиба.

1. $f'(x) = 3x^2$
2. $f''(x) = 6x$
3. $f''(x) = 0$ при $x = 0$
4. Исследуем знак $f''(x)$:

- При $x < 0$: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ выпукла вверх
- При $x > 0$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ выпукла вниз

5. При переходе через $x = 0$ знак меняется, значит $x = 0$ — точка перегиба

6. $f(0) = 0$

Точка перегиба: $(0, 0)$.

Пример 3

Функция $f(x) = x^4$

Исследуйте функцию $f(x) = x^4$ на выпуклость.

1. $f'(x) = 4x^3$

2. $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ для всех x

3. $f''(x) = 0$ при $x = 0$, но знак не меняется (всегда неотрицательна)

Значит, функция выпукла вниз на всей области определения. Точек перегиба нет.

Пример 4

Функция $f(x) = \ln x$

Исследуйте функцию $f(x) = \ln x$ на выпуклость.

Область определения: $x > 0$

1. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

2. $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ для всех $x > 0$

Значит, функция выпукла вверх на всей области определения. Точек перегиба нет.

Пример 5

Функция $f(x) = e^x$

Исследуйте функцию $f(x) = e^x$ на выпуклость.

1. $f'(x) = e^x$

2. $f''(x) = e^x > 0$ для всех x

Значит, функция выпукла вниз на всей области определения. Точек перегиба нет.

Пример 6

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на выпуклость.

Область определения: $x \neq 0$

1. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

2. $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

3. Исследуем знак на интервалах:

- При $x < 0$: $f''(x) < 0$ (так как $x^3 < 0$) $\Rightarrow$ выпукла вверх
- При $x > 0$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ выпукла вниз

4. В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому точки перегиба нет, хотя знак второй производной меняется

Пример 7

Функция $f(x) = \sin x$ на интервале $[0, 2\pi]$

Исследуйте функцию $f(x) = \sin x$ на выпуклость и найдите точки перегиба.

1. $f'(x) = \cos x$

2. $f''(x) = -\sin x$
3. $f''(x) = 0$ при $x = 0, \pi, 2\pi$ (на рассматриваемом интервале)
4. Исследуем знак:
   - $(0, \pi)$: $\sin x > 0 \Rightarrow f''(x) = -\sin x < 0 \Rightarrow$ выпукла вверх
   - $(\pi, 2\pi)$: $\sin x < 0 \Rightarrow f''(x) = -\sin x > 0 \Rightarrow$ выпукла вниз
5. При переходе через $x = \pi$ знак меняется, значит $x = \pi$ — точка перегиба
6. $f(\pi) = \sin\pi = 0$

Точка перегиба: $(\pi, 0)$.

Пример 8

Функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Исследуйте функцию на выпуклость и найдите точки перегиба.

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$
2. $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$
3. $f''(x) = 0$ при $x = 1$
4. Исследуем знак:
   - $x < 1$: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ выпукла вверх
   - $x > 1$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ выпукла вниз
5. При переходе через $x = 1$ знак меняется, значит $x = 1$ — точка перегиба
6. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

Точка перегиба: $(1, 0)$.

Пример 9

Использование второй производной для уточнения экстремумов

Для функции $f(x) = x^3 - 3x$ мы уже находили экстремумы. Проверим с помощью второй производной:

- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, критические точки $x = -1$ и $x = 1$
- $f''(x) = 6x$
- $f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ в точке $x = -1$ максимум
- $f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ в точке $x = 1$ минимум

Результат совпадает с предыдущим исследованием.

Задачи

1. Найдите промежутки выпуклости вверх и вниз для функции:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
2) $f(x) = x^3 - 3x$
3) $f(x) = x^3 + 3x^2$
4) $f(x) = x^4 - 2x^2$
5) $f(x) = \ln x$
6) $f(x) = e^{-x}$
7) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
8) $f(x) = \sqrt{x}$
9) $f(x) = \sin x$ на $[0, 2\pi]$
10) $f(x) = \cos x$ на $[0, 2\pi]$

2. Найдите точки перегиба функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$
3) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$
4) $f(x) = x^4 - 4x^3$
5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
6) $f(x) = xe^{-x}$

7) $f(x) = \ln(x^2+1)$

8) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

9) $f(x) = \sin 2x$ на $[0, \pi]$

10) $f(x) = \cos 2x$ на $[0, \pi]$

3. Исследуйте функцию и постройте её график (полное исследование):

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

4) $f(x) = x \ln x$

5) $f(x) = xe^{-x}$

6) $f(x) = \ln(x^2+1)$

Производные высших порядков

Теория

В этой главе мы научимся находить производные высших порядков — вторую, третью и так далее. Это нужно для исследования функций (выпуклость, точки перегиба) и для различных приложений.

Определение

Вторая производная — это производная от первой производной:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Третья производная — это производная от второй производной:

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

И так далее.

Обозначения:

- $f'(x)$ — первая производная
- $f''(x)$ — вторая производная
- $f'''(x)$ — третья производная
- $f^{(4)}(x)$ — четвёртая производная (в скобках, чтобы не путать со степенью)
- $f^{(n)}(x)$ — производная порядка n

Физический смысл

Если $s(t)$ — закон движения материальной точки, то:

- $v(t) = s'(t)$ — скорость
- $a(t) = v'(t) = s''(t)$ — ускорение

Таким образом, вторая производная пути по времени — это ускорение.

Механическое нахождение

Чтобы найти производную порядка n, нужно последовательно продифференцировать функцию n раз, применяя все известные правила.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Степенная функция

Найдите все производные до четвёртого порядка для функции $f(x) = x^5$.

1. $f'(x) = 5x^4$
2. $f''(x) = 20x^3$
3. $f'''(x) = 60x^2$
4. $f^{(4)}(x) = 120x$
5. $f^{(5)}(x) = 120$
6. $f^{(6)}(x) = 0$ и все следующие равны нулю

Пример 2

Многочлен

Найдите производные до третьего порядка для функции $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$.

1. $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 1$

2. $f''(x) = 12x^2 - 18x + 4$
3. $f'''(x) = 24x - 18$
4. $f^{(4)}(x) = 24$
5. $f^{(5)}(x) = 0$

Пример 3

Экспонента

Найдите производные любого порядка для функции $f(x) = e^x$.
Так как $(e^x)' = e^x$, то все производные равны самой функции:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x$$

Пример 4

Показательная функция

Найдите производные до третьего порядка для функции $f(x) = 2^x$.

1. $f'(x) = 2^x \ln 2$
2. $f''(x) = 2^x (\ln 2)^2$ (производная от $2^x \ln 2$ даёт $2^x (\ln 2)^2$)
3. $f'''(x) = 2^x (\ln 2)^3$

Видим закономерность: $f^{(n)}(x) = 2^x (\ln 2)^n$.

Пример 5

Натуральный логарифм

Найдите производные до третьего порядка для функции $f(x) = \ln x$.

1. $f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$
2. $f''(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$
3. $f'''(x) = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$
4. $f^{(4)}(x) = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$

Закономерность: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

Пример 6

Синус

Найдите производные до четвёртого порядка для функции $f(x) = \sin x$.

1. $f'(x) = \cos x$
2. $f''(x) = -\sin x$
3. $f'''(x) = -\cos x$
4. $f^{(4)}(x) = \sin x$

Производные синуса циклически повторяются с периодом 4:

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x \to \ldots$$

Пример 7

Косинус

Найдите производные до четвёртого порядка для функции $f(x) = \cos x$.

1. $f'(x) = -\sin x$
2. $f''(x) = -\cos x$
3. $f'''(x) = \sin x$

4. $f^{(4)}(x) = \cos x$

Производные косинуса тоже циклические:

$$\cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x \to \cos x \to \dots$$

Пример 8

Произведение

Найдите вторую производную функции $f(x) = x^2 \sin x$.
Сначала находим первую производную по правилу произведения:

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Теперь находим вторую производную (производную от первого выражения):

$$f''(x) = (2x \sin x)' + (x^2 \cos x)'$$

Вычисляем отдельно:

- $(2x \sin x)' = 2 \sin x + 2x \cos x$
- $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$

Складываем:

$$f''(x) = 2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x$$

Пример 9

Сложная функция

Найдите вторую производную функции $f(x) = \sin 2x$.
Первая производная: $f'(x) = 2 \cos 2x$
Вторая производная: $f''(x) = 2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -4 \sin 2x$

Пример 10

Физический смысл

Точка движется по закону $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$. Найдите скорость и ускорение в момент времени $t = 2$.
Скорость: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 2$ $v(2) = 3 \cdot 4 - 12 + 2 = 12 - 12 + 2 = 2$
Ускорение: $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 6$ $a(2) = 12 - 6 = 6$
В момент $t = 2$ скорость равна 2, ускорение равно 6.

Задачи

1. Найдите вторую производную функции:

1) $f(x) = x^4$

2) $f(x) = x^5$

3) $f(x) = x^{-2}$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

6) $f(x) = e^x$

7) $f(x) = 2^x$

8) $f(x) = \ln x$

9) $f(x) = \sin x$

10) $f(x) = \cos x$

11) $f(x) = \operatorname{tg} x$

12) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

2. Найдите третью производную функции:

1) $f(x) = x^6$

2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

5) $f(x) = e^{2x}$

6) $f(x) = \ln(2x)$

7) $f(x) = \sin 3x$

8) $f(x) = \cos 4x$

9) $f(x) = \sin x \cos x$

3. Найдите производную указанного порядка:

1) $f^{(4)}(x)$ для $f(x) = x^7$
2) $f^{(5)}(x)$ для $f(x) = x^5$
3) $f^{(10)}(x)$ для $f(x) = e^x$
4) $f^{(100)}(x)$ для $f(x) = \sin x$
5) $f^{(99)}(x)$ для $f(x) = \cos x$
6) $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = a^x$
7) $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = \ln x$
8) $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = x^k$

4. Найдите вторую производную (произведения и частные):

1) $f(x) = x \sin x$
2) $f(x) = x^2 \cos x$
3) $f(x) = e^x \sin x$
4) $f(x) = e^x \cos x$
5) $f(x) = x \ln x$
6) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
7) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
8) $f(x) = \ln x \cdot \sin x$

5. Найдите вторую производную (сложные функции):

1) $f(x) = \sin 2x$
2) $f(x) = \cos 3x$
3) $f(x) = e^{2x+1}$
4) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
5) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$
6) $f(x) = \sin^2 x$
7) $f(x) = \ln(\sin x)$
8) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

6. Физические задачи:

1) Точка движется по закону $s(t) = t^3 - 4t^2 + 2t$. Найдите скорость и ускорение в момент $t = 1$.
2) Точка движется по закону $s(t) = 2 \sin t$. Найдите скорость и ускорение в момент $t = \dfrac{\pi}{2}$.
3) Точка движется по закону $s(t) = e^{-t} \cos t$. Найдите скорость в момент $t = 0$.
4) Ускорение точки задано формулой $a(t) = 6t$. Найдите закон движения $s(t)$, если $s(0) = 0$ и $v(0) = 1$.

Логарифмическое дифференцирование

Теория

В этой главе мы научимся находить производные функций вида $y = (f(x))^{g(x)}$, где и основание, и показатель степени зависят от x. Для таких функций не подходят ни правило производной степенной функции (там основание — переменная, а показатель — константа), ни правило производной показательной функции (там основание — константа, а показатель — переменная).

Метод логарифмического дифференцирования:

1. Логарифмируем обе части равенства $y = f(x)^{g(x)}$ по натуральному основанию:
$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$
2. Дифференцируем обе части, учитывая, что y — функция от x:
$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$
3. Выражаем y':
$$y' = y \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right)$$
4. Подставляем $y = f(x)^{g(x)}$:
$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right)$$

Этот метод также удобен для функций, которые представляют собой произведение или частное многих множителей — логарифмирование превращает их в сумму, что упрощает дифференцирование.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Функция $y = x^x$

Найдите производную функции $y = x^x$ $(x > 0)$.

1. Логарифмируем: $\ln y = x \ln x$
2. Дифференцируем: $\dfrac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$
3. Выражаем y': $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

Ответ: $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Пример 2

Функция $y = x^{\sin x}$

Найдите производную функции $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$.

1. $\ln y = \sin x \cdot \ln x$
2. $\dfrac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \dfrac{1}{x}$
3. $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

Пример 3

Функция $y = (\sin x)^x$

Найдите производную функции $y = (\sin x)^x$ (при x, где $\sin x > 0$).

1. $\ln y = x \ln(\sin x)$
2. $\dfrac{y'}{y} = 1 \cdot \ln(\sin x) + x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \ln(\sin x) + x \operatorname{ctg} x$
3. $y' = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + x \operatorname{ctg} x\right)$

Пример 4

Функция $y = (2x+1)^{3x-2}$

Найдите производную функции $y = (2x+1)^{3x-2}$.

1. $\ln y = (3x-2)\ln(2x+1)$
2. $\dfrac{y'}{y} = 3\ln(2x+1) + (3x-2) \cdot \dfrac{2}{2x+1}$
3. $y' = (2x+1)^{3x-2}\left(3\ln(2x+1) + \dfrac{2(3x-2)}{2x+1}\right)$

Пример 5

Произведение многих множителей

Найдите производную функции $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

Можно, конечно, раскрыть скобки и дифференцировать многочлен четвёртой степени. Но логарифмическое дифференцирование упрощает процесс:

1. $\ln y = \ln x + \ln(x-1) + \ln(x-2) + \ln(x-3)$
2. $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$
3. $y' = x(x-1)(x-2)(x-3)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right)$

Пример 6

Частное многих множителей

Найдите производную функции $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3}$.

Логарифмируем:

$$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x-1)$$

Дифференцируем:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1}$$

Отсюда:

$$y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1}\right)$$

Пример 7

Степенная функция с параметром

Найдите производную функции $y = (x^2+1)^{\ln x}$.

1. $\ln y = \ln x \cdot \ln(x^2+1)$
2. $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x} \cdot \ln(x^2+1) + \ln x \cdot \dfrac{2x}{x^2+1}$
3. $y' = (x^2+1)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} + \dfrac{2x\ln x}{x^2+1}\right)$

Пример 8

Показательно-степенная функция

Найдите производную функции $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}$.

1. $\ln y = \sin x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x)$
2. $\dfrac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\operatorname{arctg} x) + \sin x \cdot \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$
3. $y' = (\operatorname{arctg} x)^{\sin x} \left(\cos x \ln(\operatorname{arctg} x) + \dfrac{\sin x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$

Пример 9

Проверка для простого случая

Для функции $y = x^2$ (где $g(x) = 2$ — константа) формула должна дать обычное правило степени. Проверим:

По логарифмическому методу:

$$\ln y = 2\ln x$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$
$$y' = x^2 \cdot \frac{2}{x} = 2x$$

Всё верно.

Пример 10

Проверка для показательной функции

Для функции $y = 2^x$ (где $f(x) = 2$ — константа) формула должна дать обычное правило показательной функции:

$$\ln y = x\ln 2$$
$$\frac{y'}{y} = \ln 2$$
$$y' = 2^x \ln 2$$

Всё верно.

Задачи

1. Найдите производные функций (степень зависит от x):

1) $y = x^x$
2) $y = x^{2x}$
3) $y = x^{\sin x}$
4) $y = x^{\cos x}$
5) $y = x^{\ln x}$
6) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$
7) $y = (2x)^x$
8) $y = (3x)^{2x}$
9) $y = (x^2+1)^x$
10) $y = (x^2-1)^{x^2}$

2. Найдите производные функций (основание зависит от x):

1) $y = (\sin x)^x$
2) $y = (\cos x)^x$
3) $y = (\operatorname{tg} x)^x$
4) $y = (\ln x)^x$
5) $y = (\arcsin x)^x$
6) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$
7) $y = (1+\frac{1}{x})^x$
8) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

3. Найдите производные функций (общий случай):

1) $y = (2x+1)^{3x-2}$

2) $y = (3x-2)^{4x+1}$

3) $y = (\sin 2x)^{\cos 3x}$

4) $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$

5) $y = (x^2+1)^{\sin x}$

6) $y = (e^x)^{\sin x}$ (упростите сначала)

7) $y = (2^x)^x$ (упростите сначала)

8) $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

4. Найдите производные, используя логарифмическое дифференцирование (произведения и частные):

1) $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$

2) $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$

3) $y = \dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x-2)}$

4) $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3}$

5) $y = x\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x-2}$

6) $y = \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{x^2+1}$

7) $y = \dfrac{e^x\sqrt{x}}{\ln x}$

8) $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{(2x-1)^4\sqrt{x+3}}$

5. Найдите производную, предварительно упростив:

1) $y = x^{\log_a x}$ (вспомните свойства логарифмов)

2) $y = a^{\log_a x}$

3) $y = \ln(x)^{\ln x}$

4) $y = e^{x \ln x}$

5) $y = 2^{x \log_2 x}$

6) $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

Производная неявной функции

Теория

До сих пор мы рассматривали функции, заданные явно, то есть в виде $y = f(x)$. Однако часто функция задаётся неявно — уравнением вида $F(x, y) = 0$, из которого нельзя (или сложно) выразить y через x.

Примеры неявных функций:

- $x^2 + y^2 = 1$ — окружность (здесь y можно выразить: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, но это две функции сразу)
- $x^3 + y^3 = 3xy$ — вообще не выражается явно
- $e^y + xy = 0$ — тоже не выражается

Метод дифференцирования неявной функции

Чтобы найти производную y'_x для функции, заданной уравнением $F(x, y) = 0$:

1. Дифференцируем обе части уравнения по x, считая, что y — функция от x
2. При дифференцировании выражений, содержащих y, применяем правило цепочки: $(y^n)' = ny^{n-1} \cdot y'$, $(\sin y)' = \cos y \cdot y'$ и т.д.
3. Из полученного уравнения выражаем y'

Важно! В ответе y' обычно выражается через x и y.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Окружность

Найдите производную y'_x для функции, заданной уравнением окружности $x^2 + y^2 = 1$.

1. Дифференцируем обе части по x:

$$(x^2)' + (y^2)' = (1)'$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

2. Выражаем y':

$$2yy' = -2x$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Заметим, что для верхней полуокружности $y = \sqrt{1 - x^2}$ производная равна $-\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, что совпадает с полученным выражением.

Пример 2

Эллипс

Найдите производную y'_x для функции, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

1. Дифференцируем:

$$\frac{2x}{4} + \frac{2y}{9} \cdot y' = 0$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{9} y' = 0$$

2. Выражаем y':

$$\frac{2y}{9} y' = -\frac{x}{2}$$

$$y' = -\frac{x}{2} \cdot \frac{9}{2y} = -\frac{9x}{4y}$$

Пример 3

Произведение x и y

Найдите производную y'_x для функции, заданной уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$.

1. Дифференцируем:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 3(x'y + xy') = 3(y + xy')$$

2. Переносим всё в одну сторону:

$$3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$$

$$3y^2y' - 3xy' = 3y - 3x^2$$

$$3(y^2 - x)y' = 3(y - x^2)$$

3. Выражаем y':

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Пример 4

Экспонента и логарифм

Найдите производную y'_x для функции, заданной уравнением $e^y + xy = 0$.

1. Дифференцируем:

$$e^y \cdot y' + (1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

$$e^y y' + y + xy' = 0$$

2. Собираем слагаемые с y':

$$(e^y + x)y' + y = 0$$

3. Выражаем y':

$$(e^y + x)y' = -y$$

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}$$

Пример 5

Тригонометрическая функция

Найдите производную y'_x для функции, заданной уравнением $\sin(xy) = x + y$.

1. Дифференцируем левую часть: $(\sin(xy))' = \cos(xy) \cdot (xy)' = \cos(xy) \cdot (y + xy')$

2. Дифференцируем правую часть: $(x + y)' = 1 + y'$

3. Получаем уравнение:

$$\cos(xy)(y + xy') = 1 + y'$$

4. Раскрываем скобки:

$$y\cos(xy) + x\cos(xy) \cdot y' = 1 + y'$$

5. Собираем слагаемые с y':

$$x\cos(xy) \cdot y' - y' = 1 - y\cos(xy)$$

$$(x\cos(xy) - 1)y' = 1 - y\cos(xy)$$

6. Выражаем y':

$$y' = \frac{1 - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 1}$$

Пример 6

Логарифмическая функция

Найдите производную y'_x для функции, заданной уравнением $y\ln x = x\ln y$.

1. Дифференцируем левую часть: $(y\ln x)' = y'\ln x + y\cdot\frac{1}{x}$
2. Дифференцируем правую часть: $(x\ln y)' = 1\cdot\ln y + x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'$
3. Получаем:
$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}y'$$
4. Собираем слагаемые с y':
$$y'\ln x - \frac{x}{y}y' = \ln y - \frac{y}{x}$$
$$y'\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x}$$
5. Выражаем y':
$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{\frac{x\ln y - y}{x}}{\frac{y\ln x - x}{y}} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$$

Пример 7

Нахождение значения производной в точке

Для функции, заданной уравнением $x^2 + xy + y^2 = 7$, найдите значение производной в точке $(1, 2)$.

1. Дифференцируем:
$$2x + (1\cdot y + x\cdot y') + 2y\cdot y' = 0$$
$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$
2. Выражаем y':
$$(x + 2y)y' = -2x - y$$
$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$
3. Подставляем $x = 1$, $y = 2$:
$$y'(1, 2) = -\frac{2\cdot 1 + 2}{1 + 2\cdot 2} = -\frac{2 + 2}{1 + 4} = -\frac{4}{5}$$

Пример 8

Вторая производная неявной функции

Для функции, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, найдите вторую производную y''.
Мы уже знаем, что $y' = -\frac{x}{y}$. Найдём y'' как производную от y':
$$y'' = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2}$$
Подставляем $y' = -\frac{x}{y}$:
$$y'' = -\frac{y - x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$
Но из исходного уравнения $x^2 + y^2 = 1$, поэтому:
$$y'' = -\frac{1}{y^3}$$

Задачи

1. Найдите производную y'_x для функции, заданной неявно:

1) $x^2 + y^2 = 4$

2) $x^2 - y^2 = 1$

3) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

4) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

5) $x^3 + y^3 = 8$

6) $x^3 - y^3 = 1$

7) $xy = 1$

8) $x^2y + xy^2 = 2$

9) $x^2 + xy + y^2 = 3$

10) $x^2 - xy + y^2 = 4$

2. Найдите производную y'_x для функции, заданной неявно:

1) $\sin x + \cos y = 0$

2) $\sin(x + y) = 1$

3) $\cos(xy) = x$

4) $\sin(xy) = y$

5) $e^x + e^y = 1$

6) $e^{xy} = x + y$

7) $\ln x + \ln y = 1$

8) $\ln(xy) = x + y$

9) $\mathrm{arctg}(xy) = x$

10) $\arcsin(x + y) = y$

3. Найдите значение производной в указанной точке:

1) $x^2 + y^2 = 25,\ (3, 4)$

2) $x^2 + xy + y^2 = 7,\ (1, 2)$

3) $xy = 1,\ (2, \frac{1}{2})$

4) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ (2, 0)$

5) $\sin(xy) = 0,\ \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

6) $e^x + e^y = 2e,\ (1, 1)$

4. Найдите вторую производную y'' для функции, заданной неявно:

1) $x^2 + y^2 = 1$

2) $x^2 - y^2 = 1$

3) $xy = 1$

4) $x^2 + y^2 = 4$

5) $x^2 + xy + y^2 = 3$

6) $e^y = x$

5. Найдите уравнение касательной к кривой в указанной точке:

1) $x^2 + y^2 = 25,\ (3, 4)$

2) $x^2 + xy + y^2 = 7,\ (1, 2)$

3) $xy = 1,\ (2, \frac{1}{2})$

4) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ (2, 0)$

5) $\sin(xy) = 0,\ \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

6) $e^x + e^y = 2e,\ (1, 1)$

Производная параметрически заданной функции

Теория

Функция может быть задана не только явно $y = f(x)$ или неявно $F(x, y) = 0$, но и параметрически — с помощью двух уравнений, где x и y выражены через третью переменную t (параметр):

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Параметр t обычно изменяется на некотором промежутке. При изменении t точка (x, y) вычерчивает кривую на плоскости.

Первая производная

Чтобы найти производную y'_x для параметрически заданной функции, нужно воспользоваться формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

где $x'_t = \varphi'(t)$, $y'_t = \psi'(t)$, и предполагается, что $\varphi'(t) \neq 0$.

Вторая производная

Вторая производная y''_{xx} находится по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)}$$

Или в развёрнутом виде:

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Параметрическое задание прямой

Найдите производную y'_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$$

Находим производные по параметру:

$$x'_t = 2, \quad y'_t = 3$$

По формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3}{2}$$

Это ожидаемо, так как из параметрических уравнений можно выразить $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ — прямая с угловым коэффициентом $\frac{3}{2}$.

Пример 2

Параметрическое задание окружности

Найдите производную y'_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Находим производные:

$$x'_t = -\sin t, \quad y'_t = \cos t$$

По формуле:

$$y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

Это производная для верхней и нижней полуокружностей. Заметим, что $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{x}{y}$, поэтому $y'_x = -\frac{x}{y}$, что совпадает с производной неявной функции $x^2 + y^2 = 1$.

Пример 3

Параметрическое задание эллипса

Найдите производную y'_x для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

Находим производные:

$$x'_t = -2\sin t, \quad y'_t = 3\cos t$$

По формуле:

$$y'_x = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t$$

Пример 4

Нахождение второй производной

Найдите первую и вторую производные для параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

1. Первая производная:

$$x'_t = 2t, \quad y'_t = 3t^2$$

$$y'_x = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$$

2. Вторая производная: Находим производную от y'_x по t:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{3t}{2}\right)' = \frac{3}{2}$$

Тогда:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{3/2}{2t} = \frac{3}{4t}$$

Пример 5

Вторая производная по формуле

Найдите первую и вторую производные для параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Мы уже знаем, что $y'_x = -\operatorname{ctg} t$. Найдём вторую производную по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'}{-\sin t} = \frac{-(-\csc^2 t)}{-\sin t} = \frac{\csc^2 t}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

Так как $\sin t = y$, то $y''_{xx} = -\frac{1}{y^3}$, что совпадает с результатом, полученным для неявной функции.

Пример 6

Параметрическое задание циклоиды

Найдите производную для циклоиды:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

Находим производные:

$$x'_t = 1 - \cos t, \quad y'_t = \sin t$$

По формуле:

$$y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

Упростим, используя формулы половинного угла: $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$, $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$. Тогда:

$$y'_x = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

Пример 7

Нахождение уравнения касательной

Для параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

найдите уравнение касательной в точке, соответствующей $t = 1$.

При $t = 1$: $x = 1$, $y = 1$. Производная при $t = 1$: $y'_x = \frac{3t}{2} = \frac{3}{2}$.

Уравнение касательной:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

Пример 8

Производная в особой точке

Для параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

найдите производную при $t = 0$.

При $t = 0$: $x'_t = 3t^2 = 0$, $y'_t = 2t = 0$. Формула $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ даёт неопределённость $\frac{0}{0}$.

В таких случаях нужно искать предел:

$$y'_x = \lim_{t \to 0}\frac{y'_t}{x'_t} = \lim_{t \to 0}\frac{2t}{3t^2} = \lim_{t \to 0}\frac{2}{3t} = \infty$$

Касательная вертикальна: $x = 0$.

Пример 9

Производная сложной параметрической функции

Найдите производную для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

Находим производные:

$$x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$
$$y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

Тогда:

$$y'_x = \frac{e^t (\sin t + \cos t)}{e^t (\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$

Задачи

1. Найдите производную y'_x для функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \ln t \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$

2. Найдите первую и вторую производные для функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

3. Найдите уравнение касательной к кривой в точке, соответствующей указанному значению параметра:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, \ t = 1$

2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t = \frac{\pi}{4}$

3) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}, \ t = 0$

4) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}, \ t = 1$

5) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \ t = \frac{\pi}{2}$

6) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \ t = 0$

4. Найдите точки, в которых касательная горизонтальна или вертикальна:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

5. Найдите производную y'_x в указанной точке (где это возможно):

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, t = 0$

2) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}, t = 0$

3) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}, t = \frac{\pi}{2}$

4) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}, t \to -\infty$

Вторая производная параметрически заданной функции

Теория

В предыдущей главе мы научились находить первую производную для параметрически заданной функции. Теперь рассмотрим нахождение второй производной более подробно.

Формула для второй производной

Для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

первая производная находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Вторая производная находится по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)}$$

Если раскрыть производную дроби, получим:

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

Важно! Вторая производная тоже выражается через параметр t. Чтобы получить y'' как функцию от x, нужно выразить t через x, что не всегда возможно.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Степенная параметризация

Найдите вторую производную для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

1. Первая производная:

$$x'_t = 2t, \quad y'_t = 3t^2$$

$$y'_x = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$$

2. Находим производную от y'_x по t:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{3t}{2}\right)' = \frac{3}{2}$$

3. Вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{3/2}{2t} = \frac{3}{4t}$$

Пример 2

Использование общей формулы

Для той же функции найдём вторую производную по общей формуле:
$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$
Имеем:
$$\varphi(t) = t^2, \quad \varphi'(t) = 2t, \quad \varphi''(t) = 2$$
$$\psi(t) = t^3, \quad \psi'(t) = 3t^2, \quad \psi''(t) = 6t$$
Подставляем:
$$y''_{xx} = \frac{6t \cdot 2t - 3t^2 \cdot 2}{(2t)^3} = \frac{12t^2 - 6t^2}{8t^3} = \frac{6t^2}{8t^3} = \frac{3}{4t}$$
Результат совпадает.

Пример 3

Окружность

Найдите вторую производную для параметрически заданной окружности:
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

1. Первая производная:
$$x'_t = -\sin t, \quad y'_t = \cos t$$
$$y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

2. Производная от y'_x по t:
$$(y'_x)'_t = (-\operatorname{ctg} t)' = \csc^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$$

3. Вторая производная:
$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1/\sin^2 t}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

Так как $\sin t = y$, то $y''_{xx} = -\frac{1}{y^3}$.

Пример 4

Эллипс

Найдите вторую производную для параметрически заданного эллипса:
$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

1. Первая производная:
$$x'_t = -2\sin t, \quad y'_t = 3\cos t$$
$$y'_x = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t$$

2. Производная от y'_x по t:
$$(y'_x)'_t = -\frac{3}{2} \cdot (-\csc^2 t) = \frac{3}{2}\csc^2 t = \frac{3}{2\sin^2 t}$$

3. Вторая производная:
$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{3/(2\sin^2 t)}{-2\sin t} = -\frac{3}{4\sin^3 t}$$

Пример 5

Циклоида

Найдите вторую производную для циклоиды:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

1. Первая производная (мы нашли ранее):

$$x'_t = 1 - \cos t, \quad y'_t = \sin t$$

$$y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

2. Производная от y'_x по t:

$$(y'_x)'_t = \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right)' = -\csc^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}$$

3. Вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-1/(2\sin^2 \frac{t}{2})}{1 - \cos t}$$

Учитывая, что $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$, получаем:

$$y''_{xx} = \frac{-1/(2\sin^2 \frac{t}{2})}{2\sin^2 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4\sin^4 \frac{t}{2}}$$

Пример 6

Логарифмическая параметризация

Найдите вторую производную для функции:

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$$

1. Первая производная:

$$x'_t = \frac{1}{t}, \quad y'_t = 2t$$

$$y'_x = \frac{2t}{1/t} = 2t^2$$

2. Производная от y'_x по t:

$$(y'_x)'_t = 4t$$

3. Вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{4t}{1/t} = 4t^2$$

Пример 7

Показательная параметризация

Найдите вторую производную для функции:

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$$

1. Первая производная:

$$x'_t = e^t, \quad y'_t = 2e^{2t}$$

$$y'_x = \frac{2e^{2t}}{e^t} = 2e^t$$

2. Производная от y'_x по t:

$$(y'_x)'_t = 2e^t$$

3. Вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{2e^t}{e^t} = 2$$

Это ожидаемо, так как из параметрических уравнений можно получить $y = x^2$, и вторая производная этой функции действительно равна 2.

Пример 8

Сложная параметризация

Найдите вторую производную для функции:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

1. Первая производная (нашли ранее):

$$x'_t = e^t(\cos t - \sin t), \quad y'_t = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$

2. Найдём производную от y'_x по t. Обозначим $u = \sin t + \cos t$, $v = \cos t - \sin t$. Тогда:

$$u' = \cos t - \sin t = v$$

$$v' = -\sin t - \cos t = -u$$

Производная дроби:

$$(y'_x)'_t = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{v \cdot v - u \cdot (-u)}{v^2} = \frac{v^2 + u^2}{v^2}$$

Но $u^2 + v^2 = (\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2$.
Поэтому:

$$(y'_x)'_t = \frac{2}{v^2} = \frac{2}{(\cos t - \sin t)^2}$$

3. Вторая производная:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2/(\cos t - \sin t)^2}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

Пример 9

Особая точка

Для функции $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ найдите вторую производную при $t = 0$.

При $t = 0$: $x'_t = 3t^2 = 0$, $y'_t = 2t = 0$. Формулы не работают непосредственно. Нужно исследовать поведение функции.

При $t \neq 0$:

$$y'_x = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{2}{3t^2}$$

$$y''_{xx} = \frac{-2/(3t^2)}{3t^2} = -\frac{2}{9t^4}$$

При $t \to 0$ вторая производная стремится к $-\infty$, что указывает на вертикальную касательную и точку возврата.

Задачи

1. Найдите вторую производную для функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \ln t^2 \end{cases}$

2. Найдите вторую производную для функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ (эллипс)

2) $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\, t \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t \end{cases}$ (гипербола)

3) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ (циклоида)

4) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ (логарифмическая спираль)

5) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ (декартов лист)

6) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$

3. Найдите значение второй производной при указанном значении параметра:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $t = 2$

2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{4}$

3) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$, $t = 0$

4) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$, $t = 1$

5) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{2}$

6) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$, $t = 0$

4. Для функции, заданной параметрически, найдите уравнение касательной и значение второй производной в указанной точке:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $t = 1$

2) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{4}$

3) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $t = 0$

4) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{3}$

Производные высших порядков для параметрических функций

Теория

В этой главе мы обобщим полученные знания и научимся находить производные любого порядка для параметрически заданных функций.

Общая формула

Для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

производные любого порядка могут быть найдены последовательным применением формулы:

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)_t'}{x_t'}$$

где $y_x^{(n)}$ обозначает производную порядка n по x.

Компактная запись через дифференциалы

Существует также компактная формула для производных высших порядков:

$$d^2y = y''_{xx}dx^2$$
$$d^3y = y'''_{xxx}dx^3$$

Но на практике проще использовать последовательное дифференцирование.

Формулы для первых трёх производных

Для справки приведём явные формулы:

$$\begin{aligned}
y'_x &= \frac{\psi'}{\varphi'} \\
y''_{xx} &= \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3} \\
y'''_{xxx} &= \frac{(\psi'''\varphi' - 3\psi''\varphi'' + 3\psi'\varphi''')\varphi' - (\psi''\varphi' - \psi'\varphi'')\varphi''}{(\varphi')^5}
\end{aligned}$$

Однако запоминать эти громоздкие формулы не нужно — гораздо важнее понимать принцип последовательного дифференцирования.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Третья производная для степенной параметризации

Найдите третью производную для функции:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

Мы уже нашли первые две производные:

$$y'_x = \frac{3t}{2}, \quad y''_{xx} = \frac{3}{4t}$$

Теперь найдём третью производную:

1. Находим производную от y''_{xx} по t:

$$(y''_{xx})'_t = \left(\frac{3}{4t}\right)' = -\frac{3}{4t^2}$$

2. Третья производная:

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{-3/(4t^2)}{2t} = -\frac{3}{8t^3}$$

Пример 2

Третья производная для окружности

Найдите третью производную для параметрически заданной окружности:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Мы уже нашли:

$$y'_x = -\operatorname{ctg} t, \quad y''_{xx} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

Находим третью производную:

1. Производная от y''_{xx} по t:

$$(y''_{xx})'_t = \left(-\frac{1}{\sin^3 t}\right)' = -(-3)\sin^{-4} t \cdot \cos t = \frac{3\cos t}{\sin^4 t}$$

2. Третья производная:

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{3\cos t/\sin^4 t}{-\sin t} = -\frac{3\cos t}{\sin^5 t}$$

Пример 3

Третья производная для экспоненциальной параметризации

Найдите третью производную для функции:

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$$

Мы уже нашли:

$$y'_x = 2e^t, \quad y''_{xx} = 2$$

Третья производная:

$$(y''_{xx})'_t = (2)' = 0$$

$$y'''_{xxx} = \frac{0}{e^t} = 0$$

Все производные выше второй равны нулю, что соответствует функции $y = x^2$.

Пример 4

Третья производная для логарифмической параметризации

Найдите третью производную для функции:

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Мы уже нашли:

$$y'_x = 2t^2, \quad y''_{xx} = 4t^2$$

Находим третью производную:

1. Производная от y''_{xx} по t:

$$(y''_{xx})'_t = 8t$$

2. Третья производная:

$$y'''_{xxx} = \frac{8t}{1/t} = 8t^2$$

Пример 5

Производная четвёртого порядка

Найдите $y^{(4)}_{xxxx}$ для функции $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$.

Мы уже нашли:

$$y'_x = \frac{3t}{2}, \quad y''_{xx} = \frac{3}{4t}, \quad y'''_{xxx} = -\frac{3}{8t^3}$$

Находим четвёртую производную:

1. Производная от y'''_{xxx} по t:

$$(y'''_{xxx})'_t = \left(-\frac{3}{8t^3}\right)' = \frac{9}{8t^4}$$

2. Четвёртая производная:

$$y^{(4)}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t} = \frac{9/(8t^4)}{2t} = \frac{9}{16t^5}$$

Пример 6

Применение к исследованию функции

Для функции $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ исследуйте поведение в точке $t = 0$.

При $t = 0$: $x = 0, y = 0$. Первая производная $y'_x = \dfrac{3t}{2} = 0$ при $t = 0$. Вторая производная $y''_{xx} = \dfrac{3}{4t}$ не существует (стремится к бесконечности). Третья производная тоже не существует. Это указывает на то, что в точке $(0, 0)$ — точка возврата (касп).

Пример 7

Параметризация с тригонометрическими функциями

Найдите вторую и третью производные для функции:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

Это параметризация астроиды.

1. Первые производные по t:

$$x'_t = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3\cos^2 t \sin t$$

$$y'_t = 3\sin^2 t \cos t$$

2. Первая производная по x:

$$y'_x = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$$

3. Вторая производная:

$$(y'_x)'_t = (-\operatorname{tg} t)' = -\sec^2 t = -\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$y''_{xx} = \frac{-1/\cos^2 t}{-3\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3\cos^4 t \sin t}$$

4. Третья производная (можно продолжить при необходимости)

Пример 8

Связь с кривизной

Вторая производная используется для вычисления кривизны кривой. Для параметрически заданной кривой кривизна вычисляется по формуле:

$$K = \frac{|x'_t y''_t - y'_t x''_t|}{((x'_t)^2 + (y'_t)^2)^{3/2}}$$

Для окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$:

$$x'_t = -\sin t, \quad x''_t = -\cos t$$

$$y'_t = \cos t, \quad y''_t = -\sin t$$

$$x'_t y''_t - y'_t x''_t = (-\sin t)(-\sin t) - \cos t(-\cos t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$K = \frac{|1|}{1^{3/2}} = 1$$

Радиус кривизны $R = \dfrac{1}{K} = 1$, что соответствует окружности радиуса 1.

Задачи

1. Найдите третью производную для функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{t^3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{3t} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$

2. Найдите производную четвёртого порядка:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \ln^2 t \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

3. Найдите формулу для n-й производной:

1) $\begin{cases} x = t \\ y = t^n \end{cases}$ (сведите к явному виду)

2) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{kt} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^m \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ (периодичность)

4. Исследуйте поведение функции в особых точках:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $t = 0$

2) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, $t = 0$

3) $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$, найти точки самопересечения

4) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{2}$

5. Найдите кривизну кривой в указанной точке:

1) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{4}$

2) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{4}$

3) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $t = 1$

4) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $t = 0$

Функции нескольких переменных. Частные производные

Теория

До сих пор мы рассматривали функции одной переменной $y = f(x)$. Однако в реальных задачах часто встречаются функции, зависящие от двух и более переменных. Например, температура воздуха зависит от координат x, y, z и времени t.

Функции нескольких переменных

Определение: Функция двух переменных ставит в соответствие каждой упорядоченной паре (x, y) из области определения некоторое число $z = f(x, y)$.

Аналогично определяются функции трёх и более переменных.

Область определения функции двух переменных — это множество точек (x, y) на плоскости, для которых выражение $f(x, y)$ имеет смысл.

Частные производные первого порядка

Определение: Частная производная функции $f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) — это производная, которая вычисляется в предположении, что y фиксировано (считается константой):

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Аналогично, частная производная по y вычисляется при фиксированном x:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначения:

$$\begin{array}{lll} f'_x(x, y), & \dfrac{\partial f}{\partial x}, & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ f'_y(x, y), & \dfrac{\partial f}{\partial y}, & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{array}$$

Правила вычисления

При вычислении частных производных используются те же правила, что и для функций одной переменной. Нужно только помнить, какую переменную считаем переменной, а какую — константой.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Степенная функция двух переменных

Найдите частные производные функции $f(x, y) = x^2 + y^3$.

1. Частная производная по x (считаем y константой):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 = 2x$$

2. Частная производная по y (считаем x константой):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 3y^2 = 3y^2$$

Пример 2

Произведение переменных

Найдите частные производные функции $f(x, y) = x^2y + xy^2$.

1. По x (считаем y константой):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot y + 1 \cdot y^2 = 2xy + y^2$$

2. По y (считаем x константой):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot 1 + x \cdot 2y = x^2 + 2xy$$

Пример 3

Деление

Найдите частные производные функции $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

1. По x (считаем y константой):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

2. По y (считаем x константой):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}$$

Пример 4

Тригонометрическая функция

Найдите частные производные функции $f(x, y) = \sin(xy)$.

1. По x (считаем y константой):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y = y\cos(xy)$$

2. По y (считаем x константой):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x = x\cos(xy)$$

Пример 5

Экспонента

Найдите частные производные функции $f(x, y) = e^{x^2y}$.

1. По x (считаем y константой):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y} \cdot (2xy) = 2xye^{x^2y}$$

2. По y (считаем x константой):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2y} \cdot (x^2) = x^2e^{x^2y}$$

Пример 6

Логарифм

Найдите частные производные функции $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

1. По x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

2. По y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Пример 7

Функция трёх переменных

Найдите частные производные функции $f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + xz$.

1. По x (считаем y, z константами):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 0 + z = 2xy + z$$

2. По y (считаем x, z константами):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^2 + 0 = x^2 + z^2$$

3. По z (считаем x, y константами):

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + 2yz + x = 2yz + x$$

Пример 8

Сложная функция

Найдите частные производные функции $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

1. По x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

2. По y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Пример 9

Значение частной производной в точке

Для функции $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ найдите $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(1,2)$.

1. Частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y$$

2. Подставляем точку $(1,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 2 + 6 = 8$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3\cdot 1 - 2\cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

Пример 10

Экономический смысл

В экономике частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ показывает, как изменится функция при малом изменении переменной x и фиксированной y. Например, если $P(K,L)$ — производительность как функция капитала K и труда L, то $\frac{\partial P}{\partial K}$ — предельная производительность капитала.

Задачи

1. Найдите частные производные первого порядка для функции:

1) $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^3$

2) $f(x,y) = x^2y + xy^2 + xyz$

3) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

4) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$

5) $f(x,y) = e^x \sin y$

6) $f(x,y) = e^{xy}\cos x$

7) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$

8) $f(x,y) = \ln(xy) + x^2y$

9) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2y)$

10) $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

11) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

12) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

2. Найдите частные производные функции трёх переменных:

1) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

2) $f(x,y,z) = xy+yz+zx$

3) $f(x,y,z) = xyz$

4) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$

5) $f(x,y,z) = e^{xy}\sin z$

6) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

7) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz)$

8) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. Найдите значение частных производных в указанной точке:

1) $f(x,y) = x^2+3xy-y^2$, $(1,2)$

2) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $(1,1)$

3) $f(x,y) = e^{xy}\cos x$, $(0,1)$

4) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$, $(1,0)$

5) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$, $(1,1)$

6) $f(x,y,z) = xyz$, $(1,2,3)$

4. Проверьте, что функция удовлетворяет указанному уравнению:

1) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ (уравнение Лапласа)

2) $f(x,y) = e^x\sin y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

3) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ (при $x^2+y^2\neq 0$)

4) $f(x,t) = \sin(x-at)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (волновое уравнение)

Частные производные высших порядков

Теория

Как и для функций одной переменной, для функций нескольких переменных можно находить производные высших порядков. Для функции двух переменных можно рассматривать вторые, третьи и т.д. частные производные.

Вторые частные производные

Для функции $f(x, y)$ существуют четыре вторые частные производные:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$ — дважды дифференцируем по x (производная по x от производной по x)
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$ — дважды дифференцируем по y (производная по y от производной по y)
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$ — сначала дифференцируем по y, затем по x
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$ — сначала дифференцируем по x, затем по y

Обозначения:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Теорема о смешанных производных

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные вторые частные производные в некоторой области, то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Эта теорема позволяет не беспокоиться о порядке дифференцирования для большинства "хороших"функций.

Производные высших порядков

Аналогично определяются производные третьего, четвёртого и более высоких порядков. Например:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Многочлен второй степени

Найдите все вторые частные производные функции $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2$.

1. Сначала находим первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 4y$$

2. Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3x - 4y) = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(3x - 4y) = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y) = 3$$

Смешанные производные совпали (как и должно быть).

Пример 2

Степенная функция

Найдите все вторые частные производные функции $f(x, y) = x^3 y^2$.

1. Первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y$$

2. Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^2) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 y) = 2x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 y) = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y^2) = 6x^2 y$$

Пример 3

Тригонометрическая функция

Найдите все вторые частные производные функции $f(x, y) = \sin(xy)$.

1. Первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$$

2. Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y\cos(xy)) = y \cdot (-\sin(xy) \cdot y) = -y^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos(xy)) = x \cdot (-\sin(xy) \cdot x) = -x^2 \sin(xy)$$

3. Смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy)) = 1 \cdot \cos(xy) + x \cdot (-\sin(xy) \cdot y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y\cos(xy)) = 1 \cdot \cos(xy) + y \cdot (-\sin(xy) \cdot x) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Пример 4

Экспонента

Найдите все вторые частные производные функции $f(x, y) = e^{x^2 y}$.

1. Первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

2. Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2xye^{x^2y}) = 2ye^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2y} + 4x^2y^2e^{x^2y} = 2y(1+2x^2y)e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2e^{x^2y}) = x^2 \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = x^4e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^{x^2y}) = 2xe^{x^2y} + x^2 \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xe^{x^2y} + 2x^3ye^{x^2y} = 2x(1+x^2y)e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xye^{x^2y}) = 2xe^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2y} + 2x^3ye^{x^2y} = 2x(1+x^2y)e^{x^2y}$$

Пример 5

Логарифм

Найдите все вторые частные производные функции $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

1. Первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

2. Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

3. Смешанная производная:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = 2y \cdot \frac{-(2x)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (уравнение Лапласа).

Пример 6

Производная третьего порядка

Найдите $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ для функции $f(x,y) = x^3y^2$.

1. Сначала найдём $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y$

2. Затем $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y) = 2x^3$

3. Наконец, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3) = 6x^2$

Можно менять порядок: сначала по x, потом дважды по y — результат будет тот же.

Пример 7

Функция трёх переменных

Найдите все вторые частные производные функции $f(x,y,z) = x^2y + yz^2$.

1. Первые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz$$

2. Вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2z$$

Пример 8

Проверка уравнения Лапласа

Проверьте, что функция $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
Из примера 5:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(y^2 - x^2) + 2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Уравнение выполнено.

Задачи

1. Найдите все вторые частные производные функции:

1) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + y^3$
2) $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$
3) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
4) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
5) $f(x, y) = e^{xy} \sin x$
6) $f(x, y) = e^x \cos y$
7) $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$
8) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$
9) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
10) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

2. Найдите указанные частные производные:

1) $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ для $f(x, y) = x^3y^2$
2) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ для $f(x, y) = x^4y^3$
3) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ для $f(x, y, z) = xyz$
4) $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ для $f(x, y) = x^3y^3$
5) $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$ для $f(x, y) = e^{xy}$
6) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ для $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

3. Проверьте равенство смешанных производных:

1) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$, показать, что $f''_{xy} = f''_{yx}$
2) $f(x, y) = e^{x^2y}$, показать, что $f''_{xy} = f''_{yx}$
3) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, показать, что $f''_{xy} = f''_{yx}$
4) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, показать, что $f''_{xy} = f''_{yx}$

4. Проверьте, что функция удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$:

1) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$
2) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
3) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
4) $f(x, y) = e^x \cos y$

5) $f(x,y) = e^x \sin y$

6) $f(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y$

5. Проверьте, что функция удовлетворяет волновому уравнению $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

1) $f(x,t) = \sin(x - at)$

2) $f(x,t) = \cos(x + at)$

3) $f(x,t) = e^{x-at}$

4) $f(x,t) = \ln(x - at)$

Производная сложной функции (несколько переменных)

Теория

В этой главе мы рассмотрим дифференцирование сложных функций, когда внутренние функции зависят от нескольких переменных.

Случай 1: Одна независимая переменная

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — функции одной переменной t. Тогда z становится сложной функцией от t:

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

Производная этой функции по t вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Эта формула называется **правилом цепочки** для функций нескольких переменных.

Случай 2: Несколько независимых переменных

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ — функции двух переменных u и v. Тогда z становится сложной функцией от u и v:

$$z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

Частные производные этой функции вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Общий случай

В общем случае, если $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где каждая x_i зависит от переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, то:

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Одна независимая переменная

Пусть $z = x^2 + xy$, где $x = \sin t$, $y = e^t$. Найдите $\frac{dz}{dt}$.

1. Находим частные производные z по x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

2. Находим производные x и y по t:

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

3. Применяем формулу:
$$\frac{dz}{dt} = (2x + y) \cdot \cos t + x \cdot e^t$$
4. Подставляем $x = \sin t$, $y = e^t$:
$$\frac{dz}{dt} = (2\sin t + e^t)\cos t + \sin t \cdot e^t$$

Пример 2

Одна независимая переменная

Пусть $z = e^{xy}$, где $x = t^2$, $y = \sin t$. Найдите $\frac{dz}{dt}$.

1. Частные производные:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$
2. Производные по t:
$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$
3. По формуле:
$$\frac{dz}{dt} = ye^{xy} \cdot 2t + xe^{xy} \cdot \cos t = e^{xy}(2ty + x\cos t)$$
4. Подставляем $x = t^2$, $y = \sin t$:
$$\frac{dz}{dt} = e^{t^2 \sin t}(2t\sin t + t^2\cos t)$$

Пример 3

Две независимые переменные

Пусть $z = x^2 + y^2$, где $x = u\cos v$, $y = u\sin v$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

1. Частные производные z по x и y:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$
2. Частные производные x и y по u и v:
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v$$
3. Находим $\frac{\partial z}{\partial u}$:
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2x \cdot \cos v + 2y \cdot \sin v$$
Подставляем $x = u\cos v$, $y = u\sin v$:
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u\cos v \cdot \cos v + 2u\sin v \cdot \sin v = 2u(\cos^2 v + \sin^2 v) = 2u$$
4. Находим $\frac{\partial z}{\partial v}$:
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 2x \cdot (-u\sin v) + 2y \cdot (u\cos v)$$
Подставляем $x = u\cos v$, $y = u\sin v$:
$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2u\cos v \cdot (-u\sin v) + 2u\sin v \cdot (u\cos v) = -2u^2\cos v\sin v + 2u^2\sin v\cos v = 0$$

Заметим, что $z = x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2$, поэтому $\frac{\partial z}{\partial u} = 2u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$ — всё сходится.

Пример 4

Смешанный случай

Пусть $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y)$, где $x = uv$, $y = u + v$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

1. Частные производные z по x и y:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y}$$
2. Частные производные x и y по u и v:
$$\frac{\partial x}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = u$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1$$
3. Находим $\frac{\partial z}{\partial u}$:
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y} \cdot v + \frac{1}{x^2 + y} \cdot 1 = \frac{2xv + 1}{x^2 + y}$$
Подставляем $x = uv$, $y = u + v$:
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2uv \cdot v + 1}{(uv)^2 + u + v} = \frac{2uv^2 + 1}{u^2v^2 + u + v}$$
4. Находим $\frac{\partial z}{\partial v}$:
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{x^2 + y} \cdot u + \frac{1}{x^2 + y} \cdot 1 = \frac{2xu + 1}{x^2 + y} = \frac{2uv \cdot u + 1}{u^2v^2 + u + v} = \frac{2u^2v + 1}{u^2v^2 + u + v}$$

Пример 5

Три переменные

Пусть $w = f(x, y, z) = x^2 + yz$, где $x = t^2$, $y = \sin t$, $z = e^t$. Найдите $\frac{dw}{dt}$.

1. Частные производные:
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = y$$
2. Производные по t:
$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \frac{dz}{dt} = e^t$$
3. По формуле:
$$\frac{dw}{dt} = 2x \cdot 2t + z \cdot \cos t + y \cdot e^t = 4xt + z\cos t + ye^t$$
4. Подставляем $x = t^2$, $y = \sin t$, $z = e^t$:
$$\frac{dw}{dt} = 4t^3 + e^t \cos t + \sin t \cdot e^t = 4t^3 + e^t(\cos t + \sin t)$$

Пример 6

Проверка независимости

Покажите, что для функции $z = f(x, y)$, где $x = u + v$, $y = u - v$, выполняется равенство:
$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 4\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

1. Находим $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$:
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 1 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (-1) = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$$
2. Вычисляем левую часть:
$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) - \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) =$$
$$= 4\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

Равенство доказано.

Пример 7

Производная по направлению

Скорость изменения функции $f(x,y)$ в направлении вектора $\vec{l}=(l_x,l_y)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы.

Это частный случай производной сложной функции, где $x=x_0+t\cos\alpha$, $y=y_0+t\cos\beta$.

Задачи

1. Найдите $\frac{dz}{dt}$ для функции:

1) $z=x^2+y^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$

2) $z=xy$, $x=e^t$, $y=e^{-t}$

3) $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=t^2$, $y=e^t$

4) $z=e^{xy}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$

5) $z=\operatorname{arctg}(xy)$, $x=t^2$, $y=t^3$

6) $z=\dfrac{x}{y}$, $x=e^t$, $y=\ln t$

2. Найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ для функции:

1) $z=x^2-y^2$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$

2) $z=xy$, $x=u+v$, $y=u-v$

3) $z=e^x\sin y$, $x=uv$, $y=u/v$

4) $z=\ln(x^2+y)$, $x=u^2+v^2$, $y=2uv$

5) $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $x=ue^v$, $y=ue^{-v}$

6) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=u\operatorname{ch}v$, $y=u\operatorname{sh}v$

3. Найдите $\frac{dw}{dt}$ для функции:

1) $w=x^2+y^2+z^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$

2) $w=xy+yz+zx$, $x=e^t$, $y=e^{2t}$, $z=e^{3t}$

3) $w=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$

4) $w=e^{xyz}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $z=t$

4. Проверьте указанные соотношения:

1) Для $z=f(x,y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, показать, что:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

2) Для $z=f(x,y)$, где $x=u^2-v^2$, $y=2uv$, показать, что:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=4(u^2+v^2)\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$$

Производная неявной функции нескольких переменных

Теория

В этой главе мы обобщим метод дифференцирования неявных функций на случай функций нескольких переменных.

Неявная функция одной переменной

Напомним, что для уравнения $F(x, y) = 0$, задающего неявно функцию $y = y(x)$, производная находится по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

при условии, что $F'_y \neq 0$.

Неявная функция двух переменных

Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает неявно функцию $z = z(x, y)$. Тогда частные производные этой функции вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

где F'_x, F'_y, F'_z — частные производные функции F по соответствующим переменным, и предполагается, что $F'_z \neq 0$.

Общий случай

В общем случае, если уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$ задает неявно функцию $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Поверхность второго порядка

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ задает сферу. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = z(x, y)$, заданной этим уравнением.

1. Запишем функцию $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
2. Находим частные производные:
$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z$$
3. Применяем формулы:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

Заметим, что это совпадает с производными, которые мы получили бы, выразив $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Пример 2

Эллипсоид

Уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ задает эллипсоид. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1. $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$

2. Частные производные:

$$F'_x = \frac{x}{2}, \quad F'_y = \frac{2y}{9}, \quad F'_z = \frac{z}{8}$$

3. По формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x/2}{z/8} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{8}{z} = -\frac{4x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y/9}{z/8} = -\frac{2y}{9} \cdot \frac{8}{z} = -\frac{16y}{9z}$$

Пример 3

Неявная функция с произведением

Уравнение $xyz = 1$ задает поверхность. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1. $F(x, y, z) = xyz - 1 = 0$

2. Частные производные:

$$F'_x = yz, \quad F'_y = xz, \quad F'_z = xy$$

3. По формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{xy} = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy} = -\frac{z}{y}$$

Проверим: из $z = \frac{1}{xy}$ действительно $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 y} = -\frac{z}{x}$.

Пример 4

Трансцендентное уравнение

Уравнение $e^z = xyz$ задает неявно функцию $z = z(x, y)$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1. $F(x, y, z) = e^z - xyz = 0$

2. Частные производные:

$$F'_x = -yz, \quad F'_y = -xz, \quad F'_z = e^z - xy$$

3. По формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{e^z - xy}$$

Пример 5

Логарифмическое уравнение

Уравнение $z \ln(xy) = 1$ задает неявно функцию $z = z(x, y)$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1. $F(x, y, z) = z \ln(xy) - 1 = 0$

2. Частные производные:

$$F'_x = z \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{z}{x}, \quad F'_y = z \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{z}{y}, \quad F'_z = \ln(xy)$$

3. По формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z/x}{\ln(xy)} = -\frac{z}{x\ln(xy)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z/y}{\ln(xy)} = -\frac{z}{y\ln(xy)}$$

Пример 6

Значение производной в точке

Для поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=4$, найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(1,1,0)$.

1. $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-4 = 0$

2. Частные производные:

$$F'_x = 2x+2y+2z, \quad F'_y = 2y+2x+2z, \quad F'_z = 2z+2x+2y$$

3. В точке $(1,1,0)$:

$$F'_x(1,1,0) = 2\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 0 = 4$$
$$F'_y(1,1,0) = 2\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 0 = 4$$
$$F'_z(1,1,0) = 2\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 1 = 4$$

4. По формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,0) = -\frac{4}{4} = -1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,0) = -\frac{4}{4} = -1$$

Пример 7

Система неявных функций

Иногда одна система уравнений может задавать несколько неявных функций. Например, система

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

может определять $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$. Производные находятся из решения линейной системы:

$$\begin{cases} F'_x + F'_u u'_x + F'_v v'_x = 0 \\ G'_x + G'_u u'_x + G'_v v'_x = 0 \end{cases}$$

Это более сложный случай, выходящий за рамки нашей книги.

Пример 8

Касательная плоскость

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке (x_0,y_0,z_0) имеет вид:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Для сферы $x^2+y^2+z^2=1$ в точке $(0,0,1)$:

$$F'_x = 2x = 0, \quad F'_y = 2y = 0, \quad F'_z = 2z = 2$$

Уравнение плоскости: $0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)+2(z-1) = 0 \Rightarrow z = 1$ — горизонтальная плоскость, касающаяся сферы в северном полюсе.

Задачи

1. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции, заданной неявно:

1) $x^2+y^2+z^2=9$

2) $x^2+2y^2+3z^2=6$

3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$

4) $xyz=2$

5) $xy+yz+zx=1$

6) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz=4$

7) $e^{xyz}=1$

8) $\ln(xyz)=0$

9) $\sin(xy)+\cos(yz)=1$

10) $\operatorname{arctg}(x+y+z)=\frac{\pi}{4}$

2. Найдите значение частных производных в указанной точке:

1) $x^2+y^2+z^2=9$, $(1,2,2)$

2) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz=4$, $(1,1,0)$

3) $xyz=2$, $(1,2,1)$

4) $e^{x+y+z}=1$, $(0,0,0)$

5) $\ln(x^2+y^2+z^2)=0$, $(1,0,0)$

6) $\sin(xy)+\cos(yz)=1$, $\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)$

3. Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности в указанной точке:

1) $x^2+y^2+z^2=9$, $(1,2,2)$

2) $x^2+y^2-z^2=1$, $(\sqrt{2},1,1)$

3) $xyz=2$, $(1,2,1)$

4) $e^{x+y+z}=1$, $(0,0,0)$

5) $z=x^2+y^2$, $(1,1,2)$ (здесь $F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$)

6) $z=\ln(x^2+y^2)$, $(1,0,0)$

4. Проверьте, что функция $z=z(x,y)$, заданная неявно, удовлетворяет указанному уравнению:

1) Для $x^2+y^2+z^2=1$ показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-z$

2) Для $xyz=1$ показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-z$

3) Для $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ (неявно) показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

4) Для $F(xy,z)=0$ показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Теория

В этой главе мы научимся строить касательную плоскость и нормаль к поверхности, заданной различными способами.

Поверхность, заданная явно

Пусть поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$. Тогда в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$:

- **Уравнение касательной плоскости**:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- **Уравнение нормали** (прямой, перпендикулярной касательной плоскости):

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Поверхность, заданная неявно

Пусть поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$. Тогда в точке (x_0, y_0, z_0), лежащей на поверхности:

- **Уравнение касательной плоскости**:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

- **Уравнение нормали**:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Геометрический смысл

Вектор $\vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)$ называется **вектором нормали** к поверхности в данной точке. Для явного задания $z = f(x, y)$ вектор нормали можно записать как $\vec{n} = (f'_x, f'_y, -1)$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Явное задание: параболоид

Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $(1, 1, 2)$.

1. Находим частные производные:

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y$$

$$f'_x(1, 1) = 2, \quad f'_y(1, 1) = 2$$

2. Уравнение касательной плоскости:

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z - 2 = 2x - 2 + 2y - 2$$

$$z = 2x + 2y - 2$$

3. Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

Пример 2

Явное задание: гиперболический параболоид

Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy$ в точке $(2, 3, 6)$.

1. Частные производные:

$$f'_x = y, \quad f'_y = x$$

$$f'_x(2,3) = 3, \quad f'_y(2,3) = 2$$

2. Уравнение касательной плоскости:

$$z - 6 = 3(x-2) + 2(y-3)$$

$$z - 6 = 3x - 6 + 2y - 6$$

$$z = 3x + 2y - 6$$

Пример 3

Неявное задание: сфера

Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ в точке $(1, 2, 3)$.

1. Запишем $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$

2. Частные производные:

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z$$

$$F'_x(1,2,3) = 2, \quad F'_y(1,2,3) = 4, \quad F'_z(1,2,3) = 6$$

3. Уравнение касательной плоскости:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

$$2x - 2 + 4y - 8 + 6z - 18 = 0$$

$$2x + 4y + 6z - 28 = 0$$

Можно сократить на 2:

$$x + 2y + 3z - 14 = 0$$

4. Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$$

Или, сократив на 2:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Пример 4

Неявное задание: эллипсоид

Найдите уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ в точке $(2, 3, 0)$.

1. $F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$

2. Частные производные:

$$F'_x = \frac{x}{2}, \quad F'_y = \frac{2y}{9}, \quad F'_z = \frac{z}{8}$$

$$F'_x(2,3,0) = 1, \quad F'_y(2,3,0) = \frac{2\cdot 3}{9} = \frac{2}{3}, \quad F'_z(2,3,0) = 0$$

3. Уравнение касательной плоскости:

$$1 \cdot (x-2) + \frac{2}{3}(y-3) + 0 \cdot (z-0) = 0$$

$$x - 2 + \frac{2}{3}y - 2 = 0$$

$$x + \frac{2}{3}y - 4 = 0$$

Умножим на 3:

$$3x + 2y - 12 = 0$$

Пример 5

Точка, где нормаль вертикальна

Для поверхности $z = x^2 + y^2$ найдите точку, в которой нормаль вертикальна.

Вектор нормали для явного задания: $\vec{n} = (f'_x, f'_y, -1) = (2x, 2y, -1)$. Нормаль вертикальна, если её горизонтальные компоненты равны нулю: $2x = 0$, $2y = 0$. Отсюда $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

В точке $(0, 0, 0)$ нормаль направлена по оси Oz вниз: $\vec{n} = (0, 0, -1)$.

Пример 6

Точка, где касательная плоскость горизонтальна

Для поверхности $z = x^2 - y^2$ найдите точку, в которой касательная плоскость горизонтальна.

Касательная плоскость горизонтальна, если её нормаль вертикальна, то есть $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ одновременно:

$$f'_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f'_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Точка $(0, 0, 0)$ — седловая точка, касательная плоскость горизонтальна: $z = 0$.

Пример 7

Угол между поверхностями

Угол между поверхностями в точке их пересечения определяется как угол между их касательными плоскостями (или между нормалями).

Найдите угол между сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$ в точке $(1, 1, 2)$.

1. Для сферы: $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6$, $\nabla F_1 = (2x, 2y, 2z) = (2, 2, 4)$ в точке $(1, 1, 2)$
2. Для параболоида: $F_2 = x^2 + y^2 - z$, $\nabla F_2 = (2x, 2y, -1) = (2, 2, -1)$ в точке $(1, 1, 2)$
3. Косинус угла между нормалями:

$$\cos\varphi = \frac{\nabla F_1 \cdot \nabla F_2}{|\nabla F_1| \cdot |\nabla F_2|} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{4+4+16} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{4+4-4}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{3\sqrt{24}} = \frac{4}{3 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

4. Угол $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$

Пример 8

Касательная плоскость к цилиндру

Найдите уравнение касательной плоскости к цилиндру $x^2 + y^2 = 4$ в точке $(2, 0, 3)$.

Цилиндр — это поверхность, не зависящая от z. Здесь $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.

1. Частные производные:

$$F'_x = 2x = 4, \quad F'_y = 2y = 0, \quad F'_z = 0$$

2. Уравнение касательной плоскости:

$$4(x-2) + 0(y-0) + 0(z-3) = 0$$

$$4(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Касательная плоскость вертикальна и проходит через точку $(2, 0, 3)$.

Задачи

1. Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке (явное задание):

1) $z = x^2 + y^2$, $(1, 2, 5)$

2) $z = x^2 - y^2$, $(2, 1, 3)$

3) $z = xy$, $(3, 4, 12)$

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$

5) $z = e^x \cos y$, $(0, 0, 1)$

6) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 0, 0)$

2. Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке (неявное задание):

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $(1, 2, 2)$

2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$, $(2, 3, 0)$

3) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$

4) $xyz = 2$, $(1, 2, 1)$

5) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz = 4$, $(1, 1, 0)$

6) $e^{x+y+z} = 1$, $(0, 0, 0)$

3. Найдите точки на поверхности, в которых касательная плоскость горизонтальна:

1) $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$

2) $z = x^2 - y^2$

3) $z = xy$

4) $z = \sin x \cos y$

4. Найдите угол между поверхностями в указанной точке их пересечения:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ и $z = x^2 + y^2$, $(1, 1, 2)$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = 0$, $(0, 2, 0)$

3) $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + z^2 = 1$, $(0, 1, 1)$

4) $z = xy$ и $x + y + z = 5$, $(1, 2, 2)$

5. Найдите уравнение касательной плоскости, проходящей через заданную прямую:

1) К параболоиду $z = x^2 + y^2$, касательная плоскость проходит через прямую $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

2) К сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, касательная плоскость проходит через прямую $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Градиент и производная по направлению

Теория

В этой главе мы познакомимся с понятием градиента функции и научимся находить скорость изменения функции в заданном направлении.

Градиент

Определение: Градиентом функции $f(x, y, z)$ в точке (x, y, z) называется вектор, составленный из частных производных:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Для функции двух переменных $f(x, y)$ градиент определяется аналогично:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Обозначения: ∇f (набла) или $\operatorname{grad} f$.

Свойства градиента

1. Градиент направлен в сторону наибольшего возрастания функции.
2. Модуль градиента равен скорости наибольшего возрастания функции:

$$|\nabla f| = \max_{\vec{l}} \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$$

3. Градиент ортогонален линиям (поверхностям) уровня функции.

Производная по направлению

Пусть задано направление единичным вектором $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы.

Определение: Производная функции f в точке (x, y, z) по направлению $\vec{l}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

Для функции двух переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

где α — угол между направлением $\vec{l}$ и осью Ox.

Связь с градиентом

Производная по направлению равна скалярному произведению градиента на единичный вектор направления:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \nabla f \cdot \vec{l}$$

Отсюда видно, что:

- Производная максимальна, когда направление совпадает с градиентом
- Производная равна нулю, когда направление ортогонально градиенту (вдоль линии уровня)

- Производная отрицательна, когда направление противоположно градиенту

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Градиент функции двух переменных

Найдите градиент функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ в точке $(1, 2)$.

1. Частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

2. В точке $(1, 2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$$

3. Градиент:

$$\nabla f(1, 2) = (2, 4)$$

Этот вектор указывает направление наискорейшего роста функции.

Пример 2

Градиент функции трёх переменных

Найдите градиент функции $f(x, y, z) = x^2y + yz^2$ в точке $(1, 2, 3)$.

1. Частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz$$

2. В точке $(1, 2, 3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1^2 + 3^2 = 10, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

3. Градиент:

$$\nabla f(1, 2, 3) = (4, 10, 12)$$

Пример 3

Производная по направлению

Для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ найдите производную в точке $(1, 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = (3, 4)$.

1. Находим единичный вектор направления:

$$|\vec{l}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\vec{l}_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

2. Градиент в точке $(1, 2)$:

$$\nabla f(1, 2) = (2, 4)$$

3. Производная по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \nabla f \cdot \vec{l}_0 = 2 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{22}{5} = 4.4$$

Пример 4

Производная по направлению с углом

Для функции $f(x, y) = xy$ найдите производную в точке $(2, 3)$ по направлению, составляющему угол 60° с положительным направлением оси Ox.

1. Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

   В точке $(2,3)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$

3. Производная по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

Пример 5

Направление наибольшего роста

Для функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ в точке $(2,1)$ найдите направление наибольшего роста и скорость изменения в этом направлении.

1. Градиент:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = -2$$

$$\nabla f(2,1) = (4,-2)$$

2. Направление наибольшего роста — это направление градиента:

$$\vec{l} = (4,-2)$$

   Единичный вектор этого направления:

$$|\nabla f| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{l}_0 = \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{-2}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

3. Скорость наибольшего роста равна модулю градиента:

$$\max \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = |\nabla f| = 2\sqrt{5}$$

Пример 6

Производная по направлению для функции трёх переменных

Для функции $f(x,y,z) = xyz$ найдите производную в точке $(1,2,3)$ по направлению вектора $\vec{l} = (2,-1,2)$.

1. Единичный вектор направления:

$$|\vec{l}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\vec{l}_0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

2. Частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

   В точке $(1,2,3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot 3 = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot 3 = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \cdot 2 = 2$$

3. Производная по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = 6 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \frac{2}{3} = 4 - 1 + \frac{4}{3} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

Пример 7

Градиент и линии уровня

Для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ линии уровня — окружности $x^2 + y^2 = C$. Градиент $(2x, 2y)$ направлен по радиусу от центра, то есть перпендикулярно касательной к окружности. Это иллюстрирует свойство: градиент ортогонален линиям уровня.

Пример 8

Производная по направлению касательной к линии уровня

Для функции $f(x, y) = x^2+y^2$ в точке $(1, 1)$ найдите производную по направлению касательной к линии уровня.

1. Линия уровня через $(1, 1)$: $x^2 + y^2 = 2$ — окружность.
2. Касательная к окружности в точке $(1, 1)$ перпендикулярна радиусу $(1, 1)$, поэтому её направление можно взять $\vec{l} = (1, -1)$ или $(-1, 1)$.
3. Единичный вектор: $\vec{l}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
4. Градиент: $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$
5. Производная по направлению:
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Действительно, вдоль линии уровня функция не меняется, поэтому производная равна нулю.

Задачи

1. Найдите градиент функции в указанной точке:

1) $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, $(1, 2)$
2) $f(x, y) = e^x \sin y$, $(0, \frac{\pi}{2})$
3) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 1)$
4) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $(1, \sqrt{3})$
5) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(1, 2, 3)$
6) $f(x, y, z) = xyz$, $(1, 2, 3)$
7) $f(x, y, z) = e^{xy} \cos z$, $(0, 1, \frac{\pi}{2})$
8) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $(1, 0, 0)$

2. Найдите производную функции в указанной точке по заданному направлению:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, 2)$, направление $\vec{l} = (3, 4)$
2) $f(x, y) = xy$, $(2, 3)$, направление $\vec{l} = (1, 1)$
3) $f(x, y) = e^x \cos y$, $(0, 0)$, направление $\vec{l} = (1, 0)$
4) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 1)$, направление $\vec{l} = (1, -1)$
5) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $(1, 1)$, направление $\vec{l} = (1, 2)$
6) $f(x, y, z) = xyz$, $(1, 2, 3)$, направление $\vec{l} = (2, -1, 2)$
7) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(1, 1, 1)$, направление $\vec{l} = (1, 1, 1)$
8) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, $(0, 0, 0)$, направление $\vec{l} = (1, 2, 3)$

3. Найдите направление наибольшего роста функции в указанной точке и скорость изменения в этом направлении:

1) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $(1, 1)$
2) $f(x, y) = xy$, $(2, 3)$
3) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
4) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(1, 2, 3)$
5) $f(x, y, z) = xyz$, $(1, 1, 1)$
6) $f(x, y, z) = e^x \sin y \cos z$, $(0, 0, 0)$

4. Найдите производную функции по направлению касательной к линии уровня:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(1,1)$

2) $f(x,y) = xy$, $(2,3)$

3) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(2,1)$

4) $f(x,y) = e^x \cos y$, $(0, \frac{\pi}{2})$

5. Проверьте, что градиент ортогонален линиям уровня:

1) Для $f(x,y) = x^2 + y^2$ в точке $(1,1)$ покажите, что $\nabla f \cdot \vec{\tau} = 0$, где $\vec{\tau}$ — касательный вектор к окружности $x^2 + y^2 = 2$

2) Для $f(x,y) = xy$ в точке $(2,3)$ покажите, что $\nabla f \cdot \vec{\tau} = 0$, где $\vec{\tau}$ — касательный вектор к гиперболе $xy = 6$

Экстремумы функций нескольких переменных

Теория

В этой главе мы научимся находить экстремумы (максимумы и минимумы) функций двух переменных. Это обобщение того, что мы делали для функций одной переменной.

Локальный экстремум

Определение: Функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность этой точки, что для всех (x, y) из этой окрестности выполняется $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (для максимума) или $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ (для минимума).

Необходимое условие экстремума

Если в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум и дифференцируема в этой точке, то её частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Точки, в которых выполняются эти условия, называются **стационарными точками** (или критическими точками первого рода).

Достаточное условие экстремума

Пусть (x_0, y_0) — стационарная точка функции $f(x, y)$. Обозначим:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Вычислим определитель (гессиан):

$$\Delta = AC - B^2$$

Тогда:

- Если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в точке (x_0, y_0) — локальный минимум
- Если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке (x_0, y_0) — локальный максимум
- Если $\Delta < 0$, то экстремума нет (седловая точка)
- Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование

Наибольшее и наименьшее значение в замкнутой области

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области, нужно:

1. Найти все стационарные точки внутри области и вычислить в них значения функции
2. Исследовать функцию на границе области (свести к функции одной переменной)
3. Сравнить все полученные значения

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Поиск стационарных точек

Найдите стационарные точки функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.

1. Находим частные производные и приравниваем к нулю:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$$
2. Стационарная точка: $(1, -2)$
3. Значение функции: $f(1, -2) = 1 + 4 - 2 - 8 + 1 = -4$

Пример 2

Исследование типа экстремума

Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

1. Находим стационарные точки:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0$$
Решаем систему: Из первого уравнения: $y = 3 - 2x$ Подставляем во второе: $x + 2(3 - 2x) - 6 = 0 \Rightarrow x + 6 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0$ Тогда $y = 3$
Стационарная точка: $(0, 3)$
2. Находим вторые производные:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$
3. Вычисляем $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ Так как $\Delta > 0$ и $A = 2 > 0$, то в точке $(0, 3)$ — локальный минимум.
4. Значение функции в точке минимума:
$$f(0, 3) = 0 + 0 + 9 - 0 - 18 = -9$$

Пример 3

Седловая точка

Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = xy$.

1. Стационарные точки:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$$
Получаем единственную точку $(0, 0)$
2. Вторые производные:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
3. $\Delta = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$ — экстремума нет, это седловая точка.

Действительно, вблизи $(0, 0)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 4

Случай $\Delta = 0$

Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = x^4 + y^4$.

1. Стационарные точки:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$$
Точка $(0, 0)$

2. Вторые производные:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$
В точке $(0, 0)$ все вторые производные равны нулю, поэтому $\Delta = 0$.
3. Требуется дополнительное исследование. Заметим, что $f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0, 0)$ для всех (x, y), причём равенство только в нуле. Значит, $(0, 0)$ — точка минимума.

Пример 5

Наибольшее и наименьшее значение в области

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ в треугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

1. Стационарные точки внутри области:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$
Точка $(1, 1)$ лежит внутри треугольника? Проверим: она удовлетворяет неравенствам $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$. Да, $1 + 1 = 2$ — на границе. Значит, это граничная точка.
2. Исследуем границу:
   - Сторона $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$: $f(x, 0) = x^2 - 2x$. Это парабола, минимум при $x = 1$: $f(1, 0) = 1 - 2 = -1$. На концах: $f(0, 0) = 0$, $f(2, 0) = 4 - 4 = 0$.
   - Сторона $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$: $f(0, y) = y^2 - 2y$. Минимум при $y = 1$: $f(0, 1) = 1 - 2 = -1$. На концах: $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = 4 - 4 = 0$.
   - Сторона $x + y = 2$, $0 \leq x \leq 2$: $y = 2 - x$. Подставляем:
   $$f(x, 2 - x) = x^2 + (2 - x)^2 - 2x - 2(2 - x) = x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x - 4 + 2x = 2x^2 - 4x$$
   Это парабола $2x^2 - 4x$ на отрезке $[0, 2]$. Вершина при $x = 1$: $f(1, 1) = 2 - 4 = -2$. На концах: $f(0, 2) = 0$, $f(2, 0) = 0$.
3. Сравниваем все полученные значения: $0, -1, -1, -2, 0$. Наименьшее: -2 в точке $(1, 1)$. Наибольшее: 0 в точках $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

Пример 6

Функция трёх переменных

Для функции трёх переменных условия экстремума сложнее. Обычно используют метод множителей Лагранжа (следующая глава) или исследуют гессиан — матрицу вторых производных.

Задачи

1. Найдите стационарные точки функции:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$
2) $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 6y$
3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
4) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y$
5) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
6) $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$
7) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
8) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

2. Исследуйте на экстремум функцию:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$
2) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
3) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y$
4) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

5) $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$

6) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 1$

7) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

8) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в заданной области:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ в треугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$

2) $f(x, y) = x^2 + y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$

3) $f(x, y) = x + y$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$

4) $f(x, y) = xy$ в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

5) $f(x, y) = x^2 - y^2$ в квадрате $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$

6) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$

4. Определите, есть ли экстремум у функции, и если да, то какого типа:

1) $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $x > 0, y > 0$

2) $f(x, y) = x \ln x + y \ln y$, $x > 0, y > 0$

3) $f(x, y) = e^{xy}$, исследовать точку $(0, 0)$

4) $f(x, y) = \sin x + \sin y$, исследовать точку $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Теория

В этой главе мы рассмотрим задачи на нахождение экстремумов функции при наличии дополнительных условий (связей). Такие экстремумы называются **условными**.

Постановка задачи

Требуется найти экстремумы функции $f(x, y)$ при условии, что переменные связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (уравнение связи).

Геометрически это означает, что мы ищем экстремумы функции на кривой, заданной уравнением $\varphi(x, y) = 0$.

Метод множителей Лагранжа

Для решения задачи вводится вспомогательная функция — **функция Лагранжа**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

где λ — новая переменная, называемая **множителем Лагранжа**.

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему трёх уравнений с тремя неизвестными (x, y, λ), находим точки, подозрительные на условный экстремум.

Достаточное условие

Для проверки типа экстремума можно исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа или использовать геометрические соображения. В простых случаях тип экстремума можно определить по смыслу задачи.

Обобщение на случай нескольких связей

Для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при наличии m уравнений связи $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ функция Лагранжа строится как:

$$L = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_m\varphi_m$$

Необходимые условия: частные производные L по всем переменным x_j и по всем λ_i равны нулю.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Максимум произведения при фиксированной сумме

Найдите максимальное значение произведения xy при условии $x + y = 10$, $x > 0$, $y > 0$.

1. Составляем функцию Лагранжа:
$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 10)$$
2. Записываем необходимые условия:
$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -y$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -x$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0$$
3. Из первых двух уравнений: $-y = -x \Rightarrow x = y$. Подставляем в третье:
$$x + x = 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5, \quad y = 5$$
4. Значение произведения: $xy = 25$. Это максимум, так как при $x \to 0$ или $y \to 0$ произведение стремится к нулю.

Заметим, что это известный факт: при фиксированной сумме произведение максимально, когда числа равны.

Пример 2

Минимум суммы при фиксированном произведении

Найдите минимальное значение суммы $x + y$ при условии $xy = 16$, $x > 0$, $y > 0$.

1. Функция Лагранжа:
$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(xy - 16)$$
2. Необходимые условия:
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy - 16 = 0$$
3. Из первых двух: $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = y$. Подставляем в третье:
$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4, \quad y = 4 \quad (x > 0)$$
4. Сумма: $x + y = 8$. Это минимум, так как при $x \to 0$ сумма стремится к бесконечности.

Пример 3

Расстояние от точки до прямой

Найдите кратчайшее расстояние от точки $(1, 2)$ до прямой $2x + 3y = 6$.

Расстояние от точки (x, y) до заданной точки $(1, 2)$ равно $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$. Минимизация расстояния эквивалентна минимизации квадрата расстояния $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ при условии $2x + 3y = 6$.

1. Функция Лагранжа:
$$L(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(2x + 3y - 6)$$
2. Необходимые условия:
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 - x$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2) + 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 4 + 3\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 6 = 0$$
3. Подставляем $\lambda = 1 - x$ во второе уравнение:
$$2y - 4 + 3(1 - x) = 0 \Rightarrow 2y - 4 + 3 - 3x = 0 \Rightarrow 2y - 1 - 3x = 0 \Rightarrow 2y = 3x + 1$$

4. Решаем систему с третьим уравнением:

$$\begin{cases} 2y = 3x + 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

Подставляем $y = \frac{3x+1}{2}$ во второе:

$$2x + 3 \cdot \frac{3x+1}{2} = 6$$

$$2x + \frac{9x+3}{2} = 6$$

Умножаем на 2:

$$4x + 9x + 3 = 12 \Rightarrow 13x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{13}$$

Тогда $y = \frac{3 \cdot \frac{9}{13} + 1}{2} = \frac{\frac{27}{13} + \frac{13}{13}}{2} = \frac{40}{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{13}$

5. Квадрат расстояния:

$$f\left(\frac{9}{13}, \frac{20}{13}\right) = \left(\frac{9}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{20}{13} - 2\right)^2 = \left(\frac{9-13}{13}\right)^2 + \left(\frac{20-26}{13}\right)^2 = \left(-\frac{4}{13}\right)^2 + \left(-\frac{6}{13}\right)^2 = \frac{16}{169} + \frac{36}{169} = \frac{52}{169} = \frac{4}{13}$$

6. Расстояние: $\sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

Это совпадает с расстоянием от точки до прямой, вычисленным по формуле $\frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|2+6-6|}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Пример 4

Экстремум функции трёх переменных с одной связью

Найдите экстремумы функции $f(x, y, z) = x + y + z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Функция Лагранжа:

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

2. Необходимые условия:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\lambda z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

3. Из первых трёх уравнений видим, что $x = y = z$. Подставляем в четвёртое:

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

4. Получаем две точки:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

5. Значения функции:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{(максимум)}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \quad \text{(минимум)}$$

Пример 5

Две связи

Найдите экстремумы функции $f(x,y,z) = x + 2y$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x + y + z = 0$.
Здесь две связи, поэтому нужны два множителя Лагранжа:

$$L = x + 2y + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$$

Система условий:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x + y + z = 0$$

Решение этой системы требует более сложных выкладок, но метод работает.

Задачи

1. Найдите условные экстремумы функции:

1) $f(x,y) = xy$ при $x + y = 6$

2) $f(x,y) = x + y$ при $xy = 9$

3) $f(x,y) = x^2 + y^2$ при $x + y = 2$

4) $f(x,y) = x^2 - y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$

5) $f(x,y) = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 5$

6) $f(x,y) = xy$ при $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. Найдите расстояние от точки до кривой (используя метод Лагранжа):

1) От точки $(3,0)$ до окружности $x^2 + y^2 = 1$

2) От точки $(1,1)$ до прямой $x + y = 0$

3) От точки $(0,2)$ до параболы $y = x^2$

4) От точки $(2,1)$ до эллипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

3. Найдите экстремумы функции трёх переменных при указанных связях:

1) $f(x,y,z) = x + y + z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ при $x + y + z = 1$

3) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

4) $f(x,y,z) = xyz$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x + y + z = 0$

4. Прикладные задачи:

1) Из всех прямоугольников с периметром P найти прямоугольник с наибольшей площадью.

2) Из всех прямоугольных параллелепипедов с заданной суммой рёбер $S = 12$ найти параллелепипед с наибольшим объёмом.

3) Найти точку на плоскости $2x+3y-z = 6$, ближайшую к началу координат.

4) Найти наибольшее значение произведения xyz при условии $x + y + z = 6$, $x, y, z > 0$.

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Производные — это тема, которая многих пугает в начале изучения. Слишком много формул, слишком много правил, слишком много разных обозначений... Но теперь вы знаете, что все эти формулы и правила складываются в стройную систему, где нет ничего лишнего.

Давайте вспомним, какой путь мы прошли.

Для школьников (главы 1–8)

Мы начали с самого простого — научились дифференцировать степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Освоили правила произведения и частного. Закрепили всё на практике. Этого достаточно, чтобы решать любые задачи на производные в ЕГЭ и ЦТ.

Для первокурсников (главы 9–18)

Мы пошли дальше: разобрались со сложной функцией, научились писать уравнения касательной и нормали, исследовать функции на монотонность, экстремумы, выпуклость. Познакомились с производными высших порядков, логарифмическим дифференцированием, неявными и параметрическими функциями. Это уже полноценный курс математического анализа первого семестра.

Для второкурсников (главы 19–26)

И наконец, мы вышли в многомерное пространство: частные производные, градиент, производная по направлению, касательная плоскость, экстремумы функций нескольких переменных и метод множителей Лагранжа. Это основа для дальнейшего изучения математической физики, оптимизации и многих инженерных дисциплин.

Что дальше?

Если вы школьник и готовитесь к экзаменам — обязательно закрепите материал, решая варианты ЕГЭ или ЦТ. Производные встречаются там и в заданиях с кратким ответом, и в экономических задачах, и в исследовании функций.

Если вы студент — следующие темы: интегралы (определённые и неопределённые), дифференциальные уравнения, кратные интегралы. Всё это будет опираться на фундамент, который мы заложили в этой книге.

Напутствие

Помните: математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость. Не бойтесь ошибаться — ошибки неизбежны при изучении нового. Важно понять, *почему* ошибка возникла, и в следующий раз её не допустить.

Если какие-то темы остались непонятыми — вернитесь к ним ещё раз. Порешайте дополнительные задачи. Посмотрите разборы примеров. Математика устроена так, что понимание приходит не сразу, а через многократное повторение.

Благодарности

Спасибо, что читали. Если нашли ошибки или есть предложения — пишите. Книга будет жить и развиваться.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть пособия по алгебре, геометрии, физике — всё, что я наработал за годы преподавания.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников и студентов. Если чувствуете, что нужна помощь — обращайтесь!

Удачи в учёбе и побольше интересных задач!

Дмитрий Трепачёв